

# Posicionamento Geoespacial I

## Capítulo 1: Nivelamento geométrico

# Nivelamento geométrico ou directo

A localização de um ponto na superfície terrestre só fica perfeitamente definida quando for conhecida para esse ponto a **altitude**, isto é, a distância medida ortogonalmente entre esse ponto e uma superfície utilizada como **referência** ou **datum vertical**.

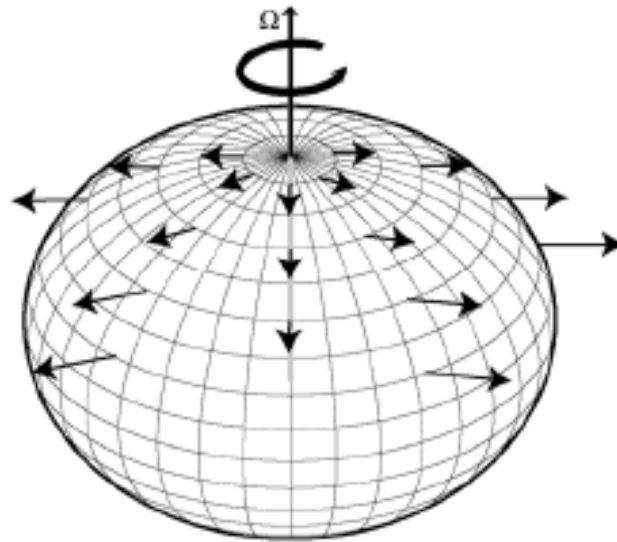
# Nivelamento geométrico ou directo

A **altitude ortométrica** (e portanto o datum ou referencial que lhe está associado) não é um conceito puramente geométrico, sem significado físico (a distância de um ponto a outro), pois é definida relativamente ao **potencial gravítico**.

# Nivelamento geométrico ou directo

Numa primeira aproximação a Terra tem uma forma esférica.

Na realidade, como a Terra não é um corpo rígido, ela é ligeiramente deformada devido à **força centrífuga** induzida pela rotação em torno do eixo que contém os polos, aproximando-se assim de um elipsóide de revolução.

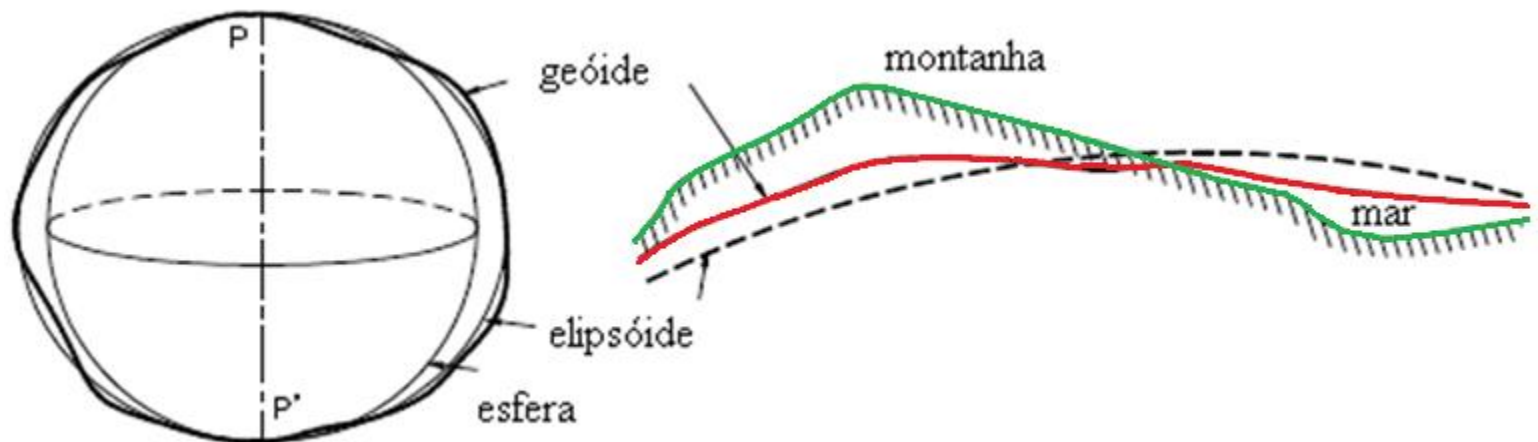


No entanto, um elipsóide é ainda um modelo demasiado simplificado da superfície terrestre.

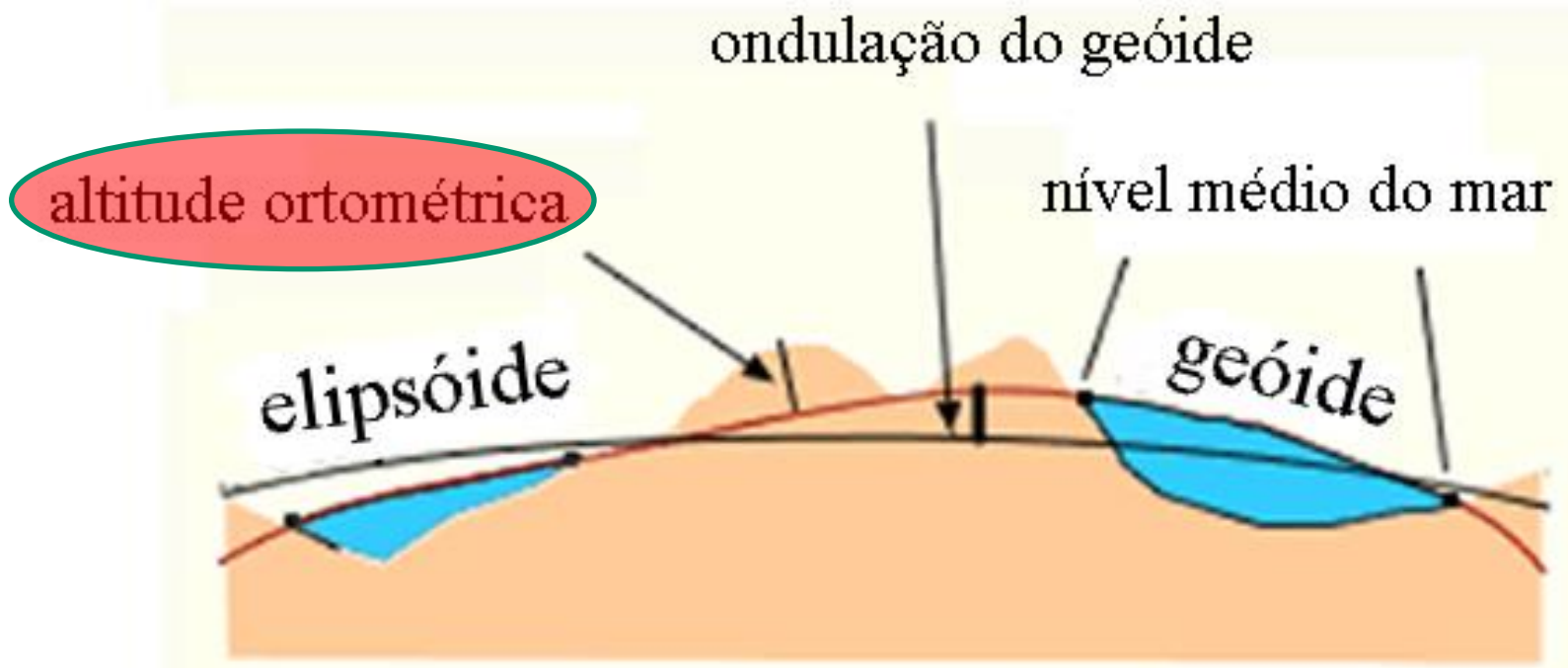
# Nivelamento geométrico ou directo

A superfície do nível médio dos oceanos em repouso, estando em equilíbrio, não tem uma forma regular, apresentando concavidades e convexidades devido a variações locais da densidade.

Esta superfície é, em qualquer ponto, normal às linhas de força do campo gravítico, isto é, é uma **superfície equipotencial do campo gravítico**, que quando prolongada sob os continentes tem a designação de **geóide**, considerado como superfície fundamental ou datum do sistema de altitudes.



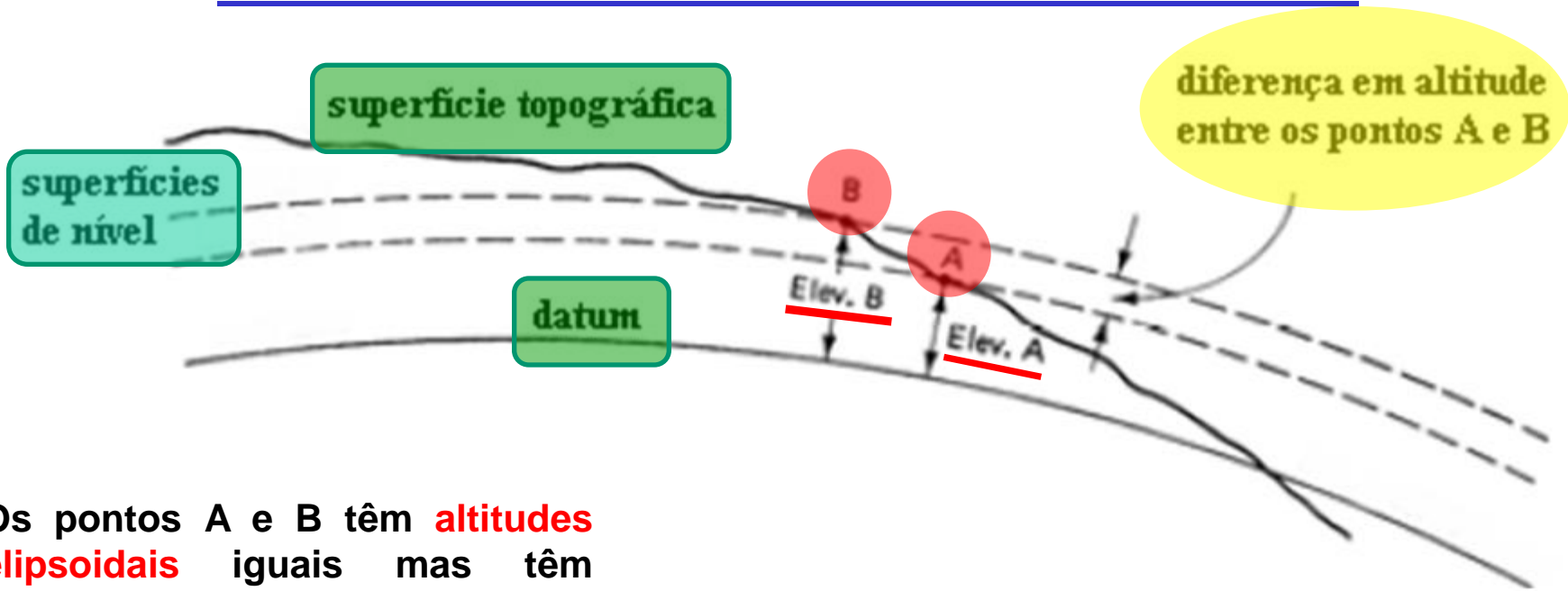
# Nivelamento geométrico ou directo



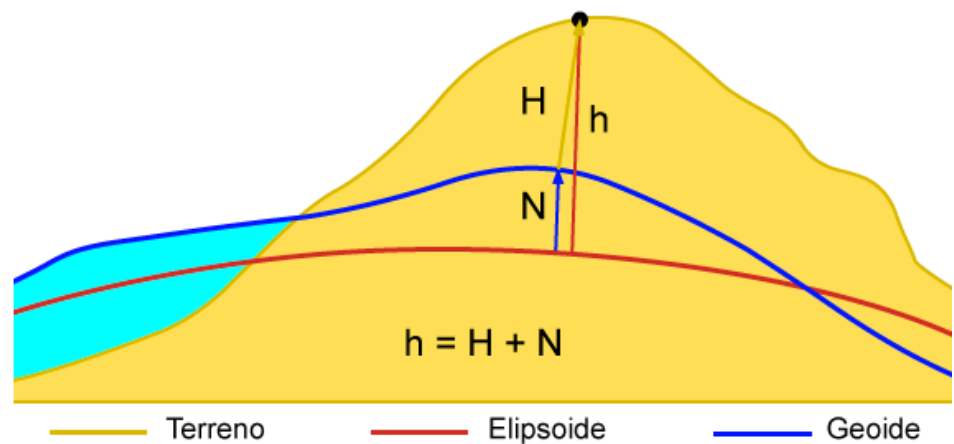
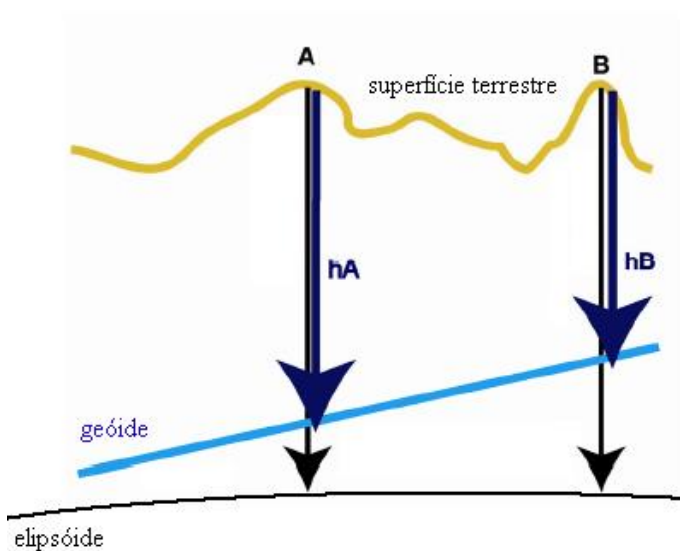
## Relação entre superfícies de referência para as altitudes

As **verticais** locais à superfície terrestre têm a direcção da **força da gravidade local**, podendo definir-se as superfícies perpendiculares a essa direcção, designadas por superfícies equipotenciais do campo gravítico terrestre, ou superfícies de nível.

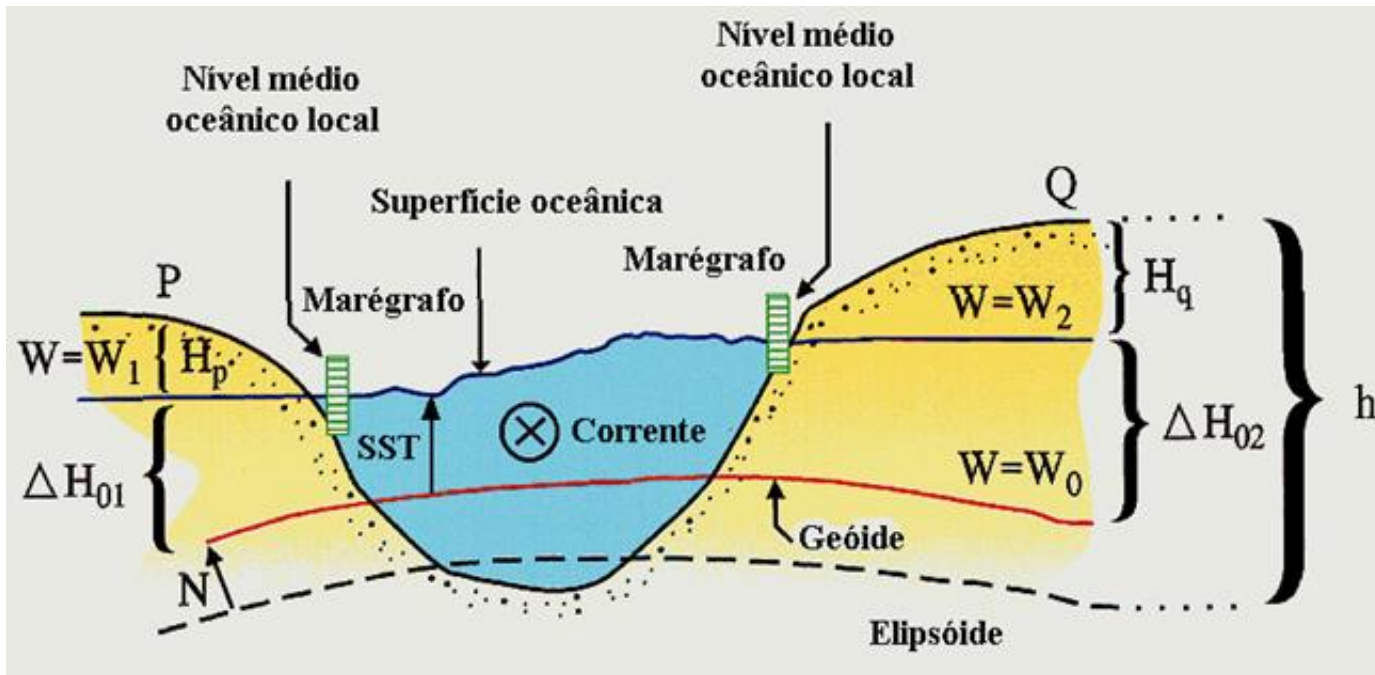
# Nivelamento geométrico ou directo



Os pontos A e B têm **altitudes elipsoidais** iguais mas têm **altitudes ortométricas** diferentes.



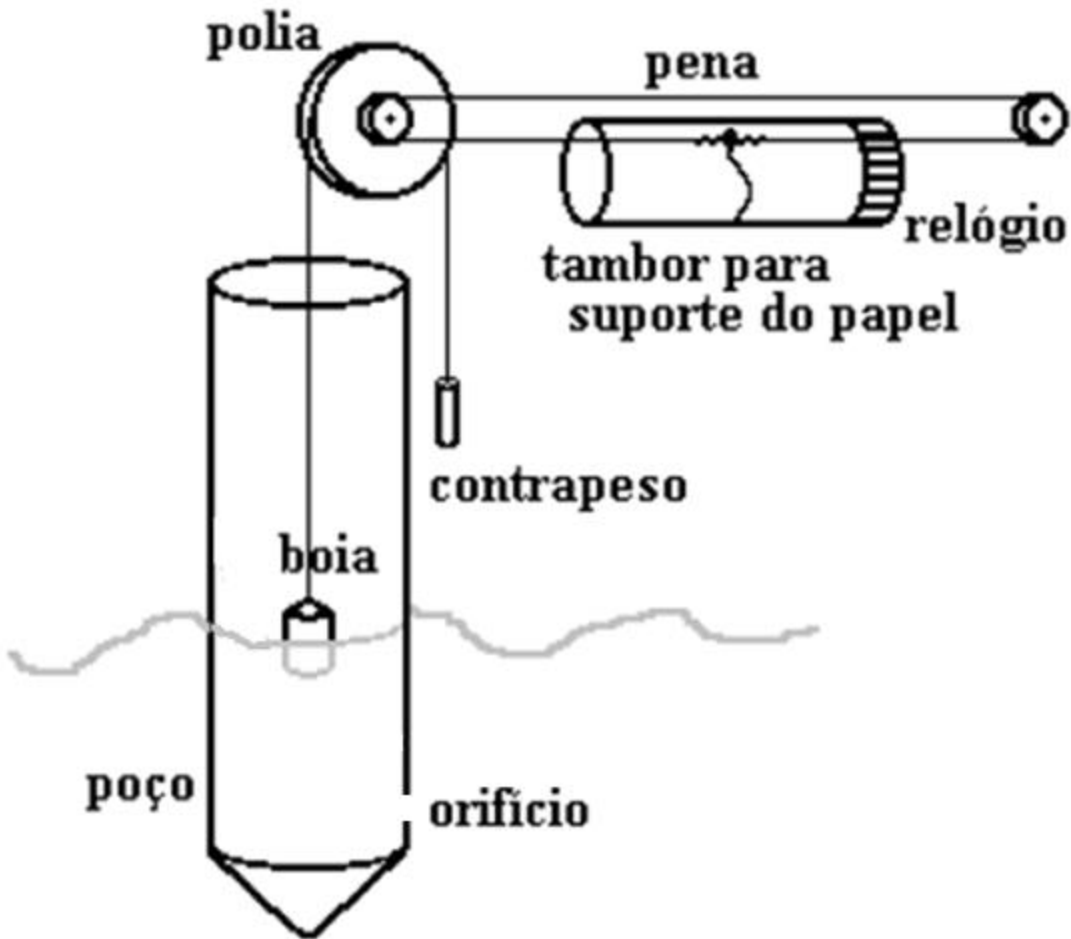
# Nivelamento geométrico ou directo



Os pontos de uma mesma superfície equipotencial podem ser determinados regionalmente, através de **marégrafos**, que definem um nível médio oceânico regional (*datum* altimétrico regional); o **geóide** é, então, a superfície equipotencial que aproxima o nível médio oceânico (MSL) global, definido através de um **conjunto global de marégrafos** (após subtração das componentes dinâmicas) e de **marcas de nivelamento**.

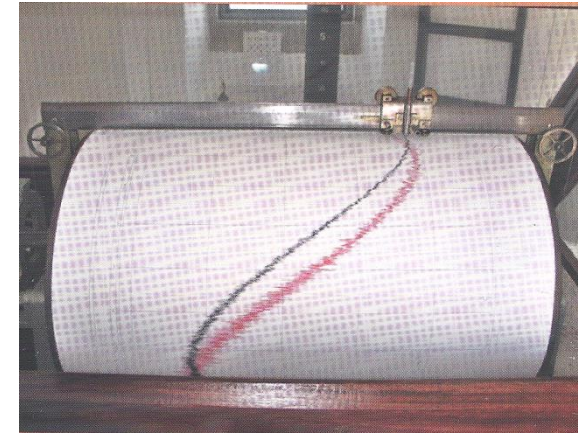
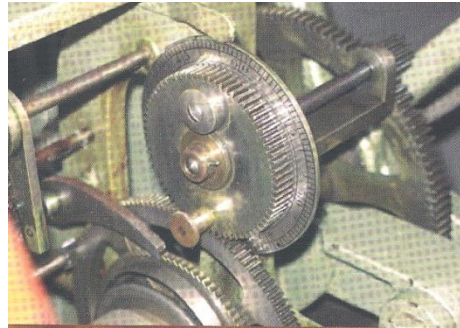
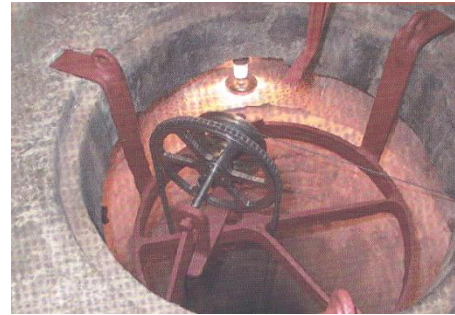


# Nivelamento geométrico ou directo

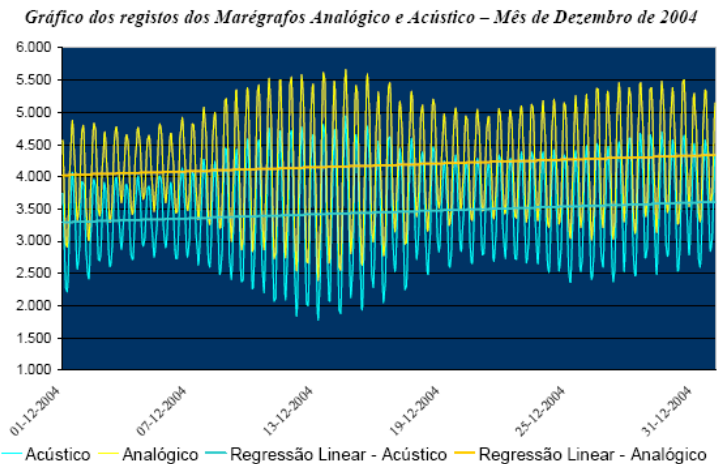


marégrafo

# Nivelamento geométrico ou directo

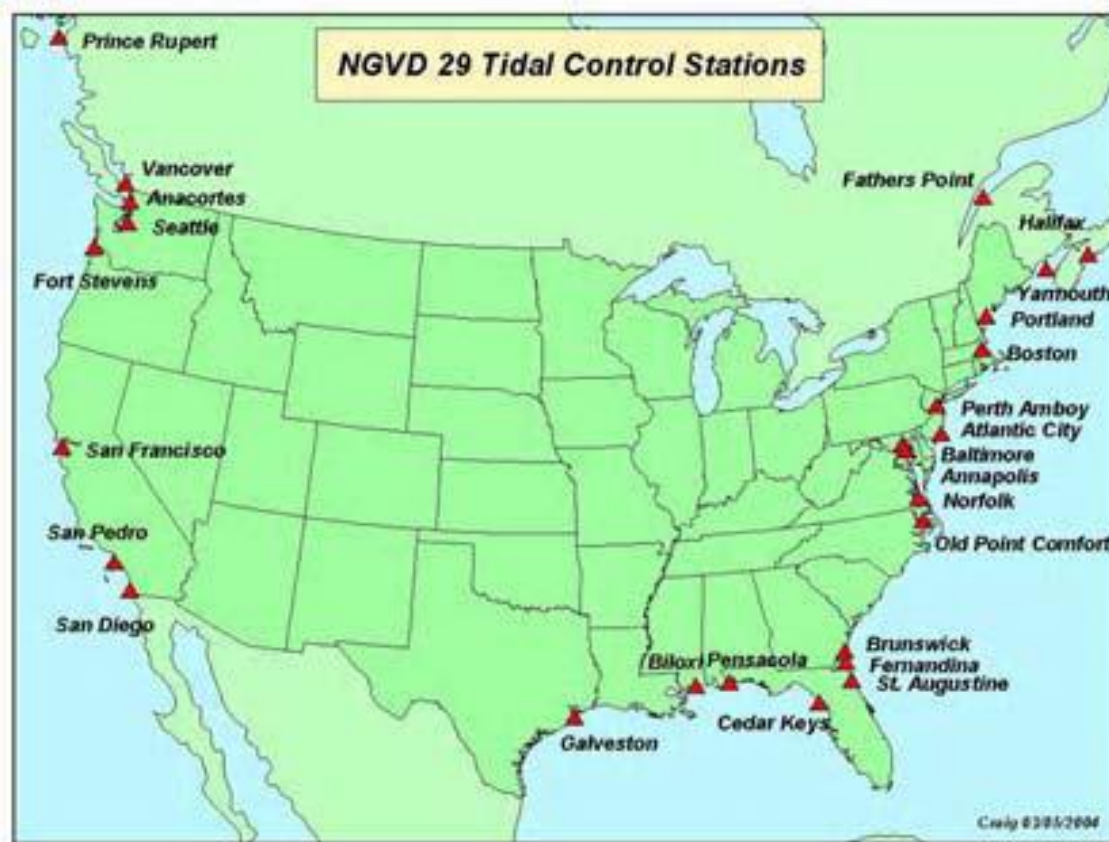


**Marégrafo de Cascais:** a funcionar desde 1882-2003



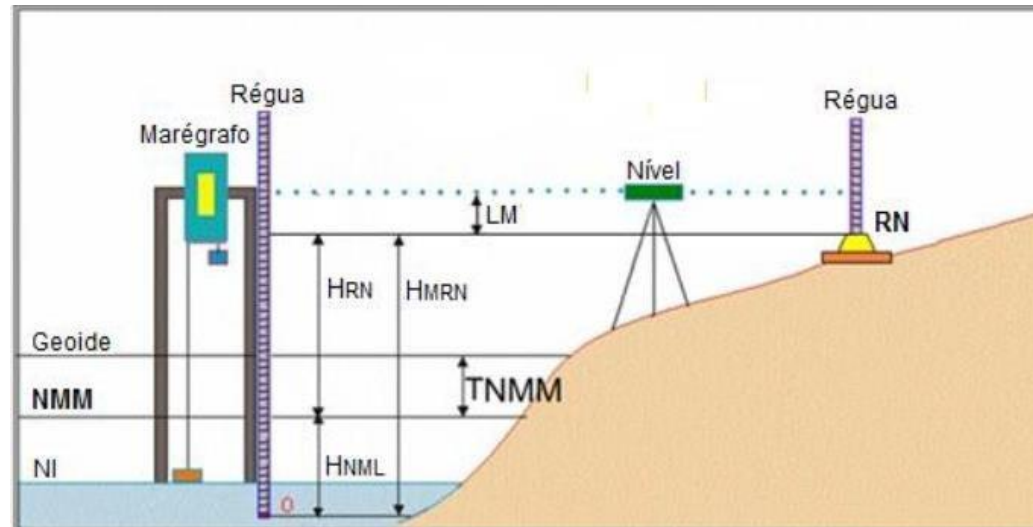
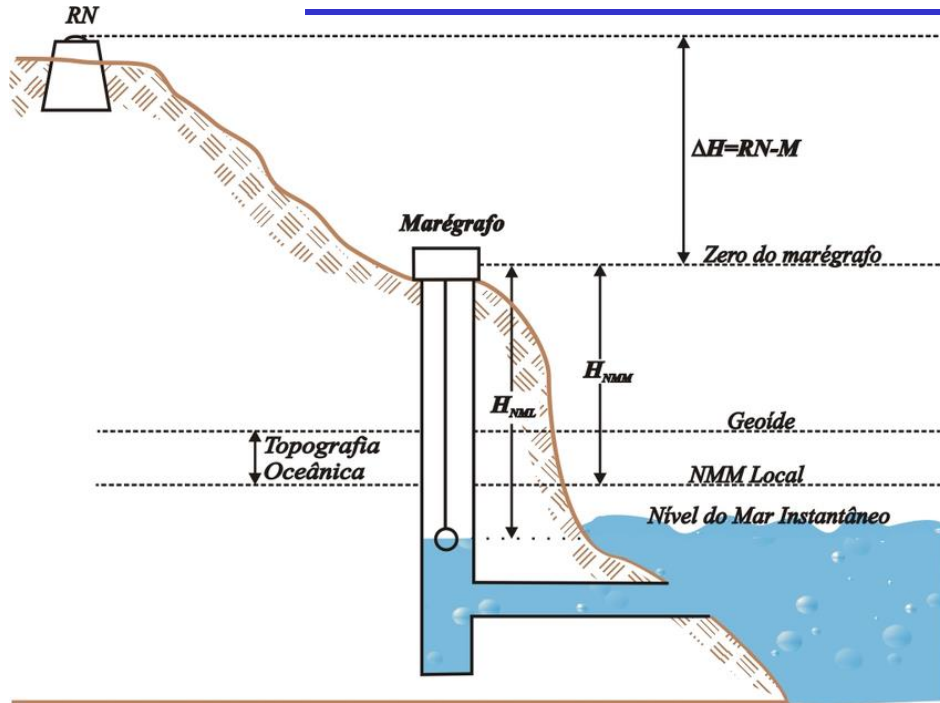
# Nivelamento geométrico ou directo

Exemplo: o datum geodésico vertical **NGDV29** incluía 26 estações maregráficas+100000 km de linhas de nivelamento; o datum geodésico vertical **NAVD88** substituiu o NAVD29, que se foi deteriorando ao longo do



tempo devido a variações do nível do mar e a levantamentos e subsidências da crosta terrestre. O novo datum inclui 1.3 milhões de observações, ajustadas em conjunto com os dados do Canadá e do México.

# Nivelamento geométrico ou directo



# Nivelamento geométrico ou directo



O sistema de referência vertical oficial do Continente é habitualmente denominado por Cascais Helmert 38 uma vez que o datum foi definido a partir da média das observações do nível do mar em Cascais registadas no marégrafo analógico entre 1882 e 1938. Desde então várias campanhas de observações foram levadas a cabo e em 2000 foi efetuado um ajustamento global de onde resultaram as altitudes ortométricas em vigor (Alth38).

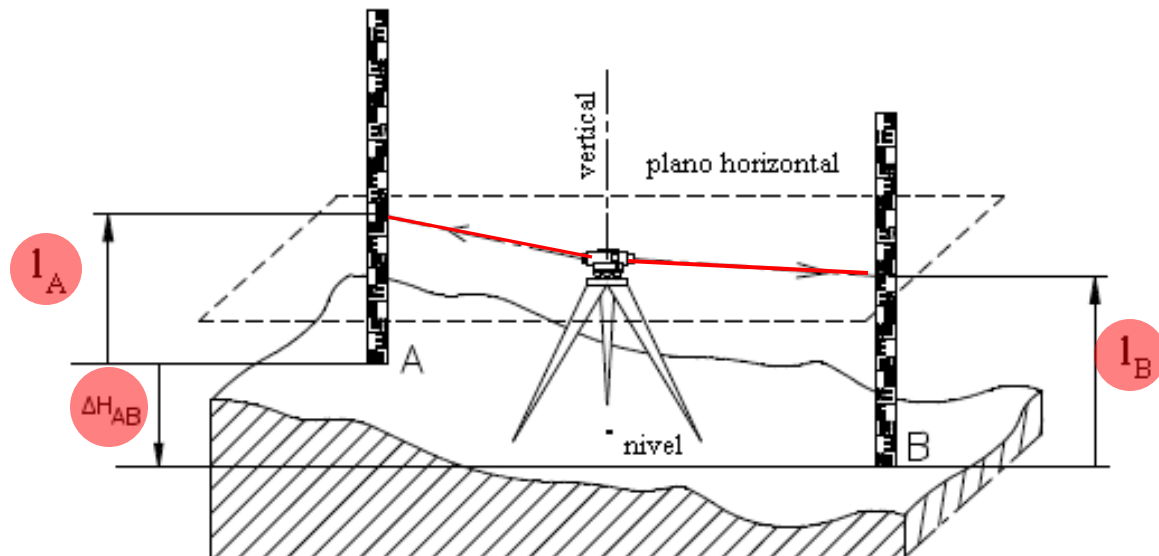
# Nivelamento geométrico ou directo

O **nivelamento geométrico ou directo** consiste na determinação do **desnível**  $\Delta_{AB}$  entre os pontos A e B através da utilização de um aparelho chamado **nível** e de uma régua vertical chamada **mira**. O nível é constituído por uma luneta que gira em torno de um eixo principal; quando o eixo principal é verticalizado, o movimento da luneta define um **plano horizontal**. A mira é sucessivamente colocada nos dois pontos A e B, efectuando o operador as leituras  $I_A$  e  $I_B$ . Obtém-se o **desnível** ou diferença de nível entre os pontos A e B efectuando a diferença entre as leituras:

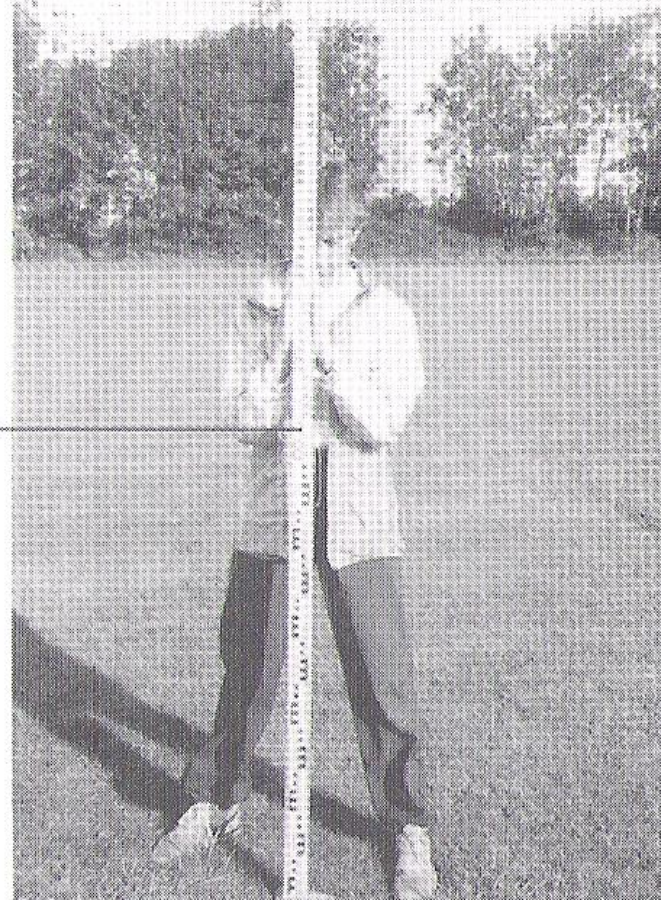
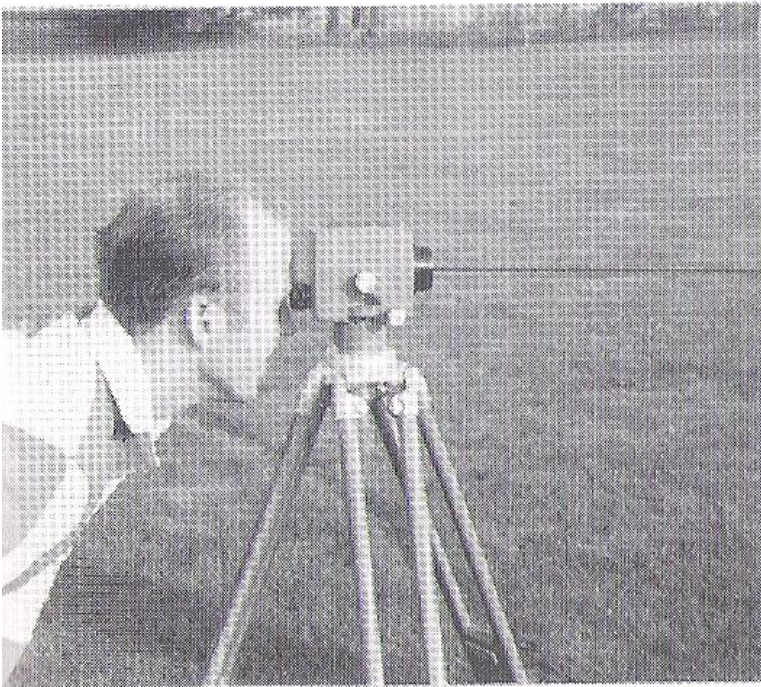
$$\Delta_{AB} = I_A - I_B$$

Tem-se da mesma forma:

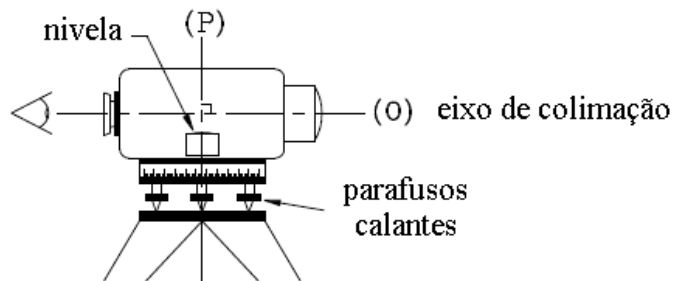
$$\Delta_{BA} = I_B - I_A$$



# Nivelamento geométrico ou directo



eixo principal



**Material: Nível (cuja principal característica é a definição de linhas de visada horizontais) + 1 ou 2 miras**

# Nivelamento geométrico ou directo

---

Precisão	ERRO RELATIVO	NIVEIS (Ex.)	MIRAS
Alta	0.2 mm/1000 m	Wild N3	milimétrica Dupla Esc./Invar
Média	1 mm/1000 m	Leica NA2 Zeiss DiNi	Centrimétrica Madeira/Plást.
Baixa	1 cm/1000 m		

## Fontes de Erro:

NÍVEL -----

MIRAS -----

OBSERVADOR -----

EXTERNOS -----

Colimação (inclinação)

Má graduação

Leitura/Calagem

Refracção



# Nivelamento geométrico ou directo

O tripé é estacionado num ponto qualquer, sendo as miras colocadas sobre os pontos cujo desnível se pretende determinar.



Para o nivelamento corrente utiliza-se com frequência o tripé GST20, de pés extensíveis; para nivelamento de precisão recomenda-se a utilização do tripé GST40, de pés fixos.

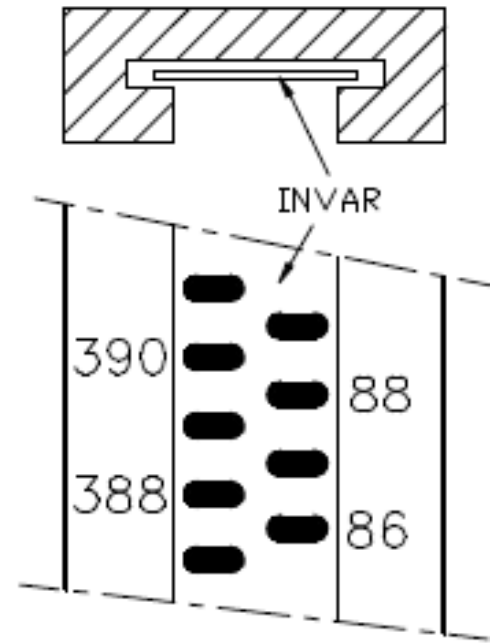
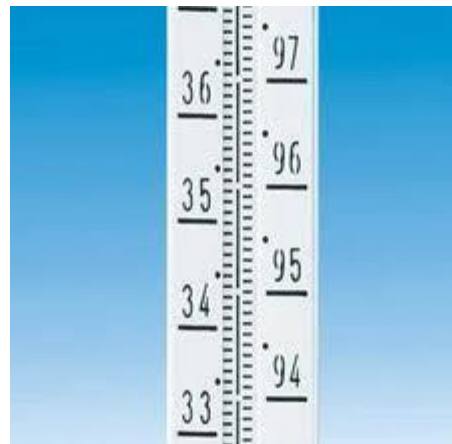
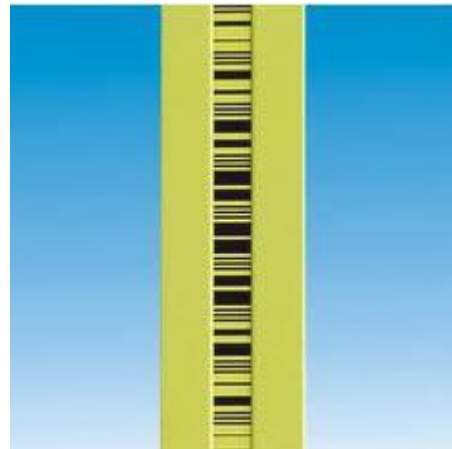


# Nivelamento geométrico ou directo



**A estabilidade do tripé é muito importante**

# Nivelamento geométrico ou directo



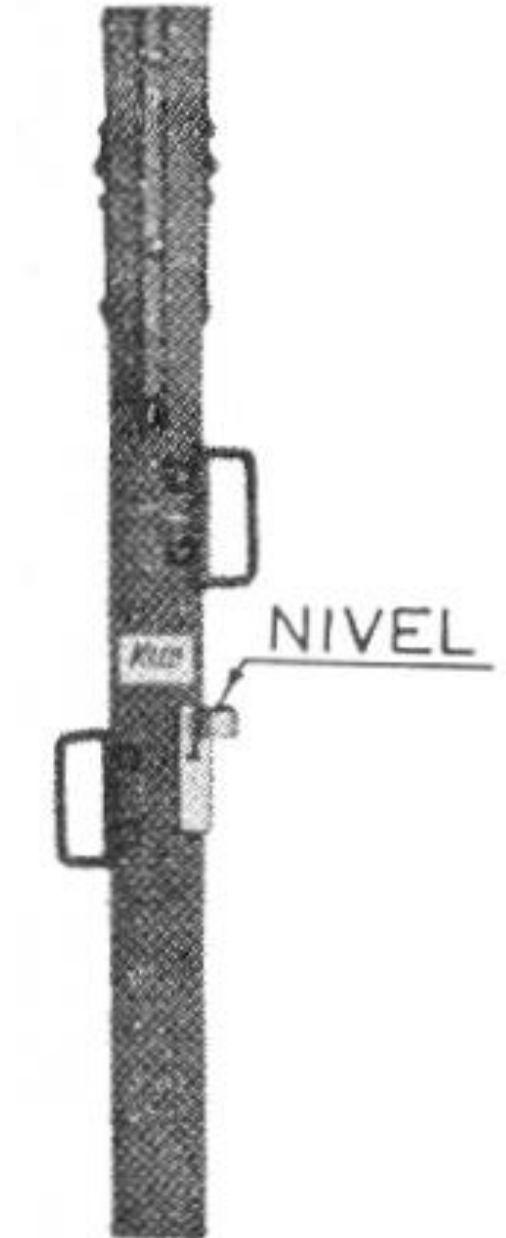
Miras de vários tipos

# Nivelamento geométrico ou directo

---



Nívela esférica para definir um plano horizontal, que permite, por construção, verticalizar a mira.



# Nivelamento geométrico ou directo

---

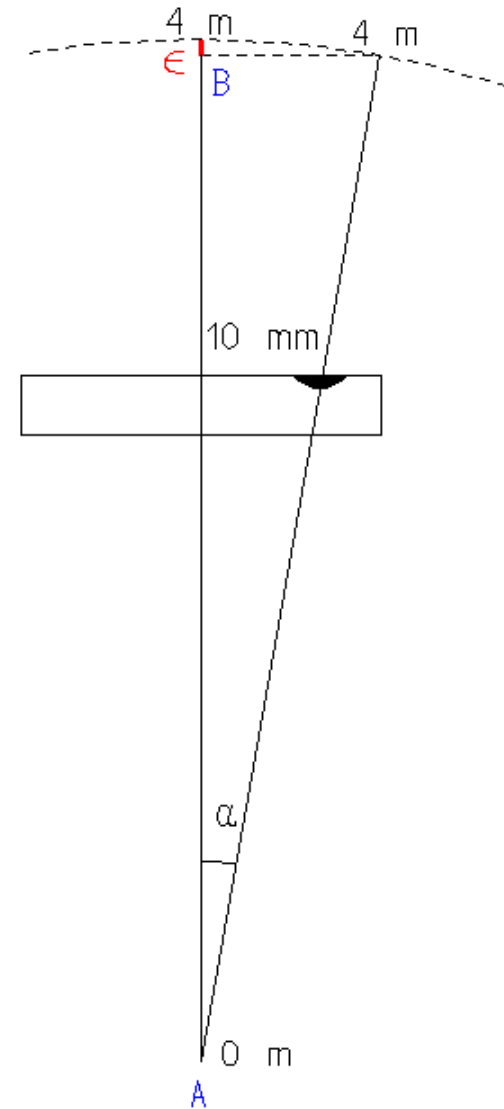
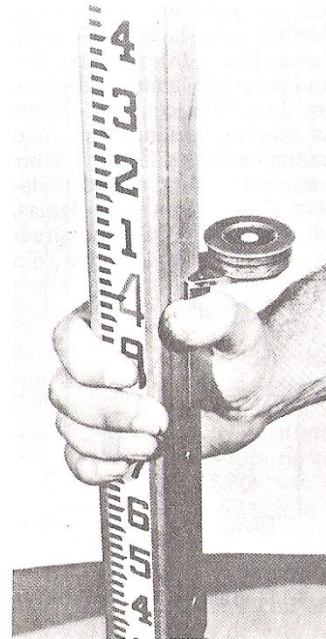
As miras de nivelamento quase nunca são **calibradas**; assim, impõe-se uma verificação ao fim de algum tempo de utilização. A regulação da **nivela esférica** é efectuada utilizando um **fio de prumo**, a partir do qual se coloca a mira vertical, sendo então regulada a posição da bolha através do parafuso de calagem.

# Nivelamento geométrico ou directo

Suponha-se que a sensibilidade da nivela esférica da mira é **8' / 2 mm** e que o erro de centragem da respectiva bolha é igual a **10 mm** (ou que a nivela está descalibrada dessa quantidade); este **erro linear** corresponde a um **erro angular** (de inclinação da mira em relação à vertical):

$$\alpha = \frac{10\text{mm}}{2\text{mm}} 8' = 40' = 0^\circ.67 = 0.74 \text{ gon}$$

Se a leitura na mira de 4 m de comprimento for efectuada no topo, a leitura 4 m excede o valor que seria lido no caso de a mira estar vertical num erro

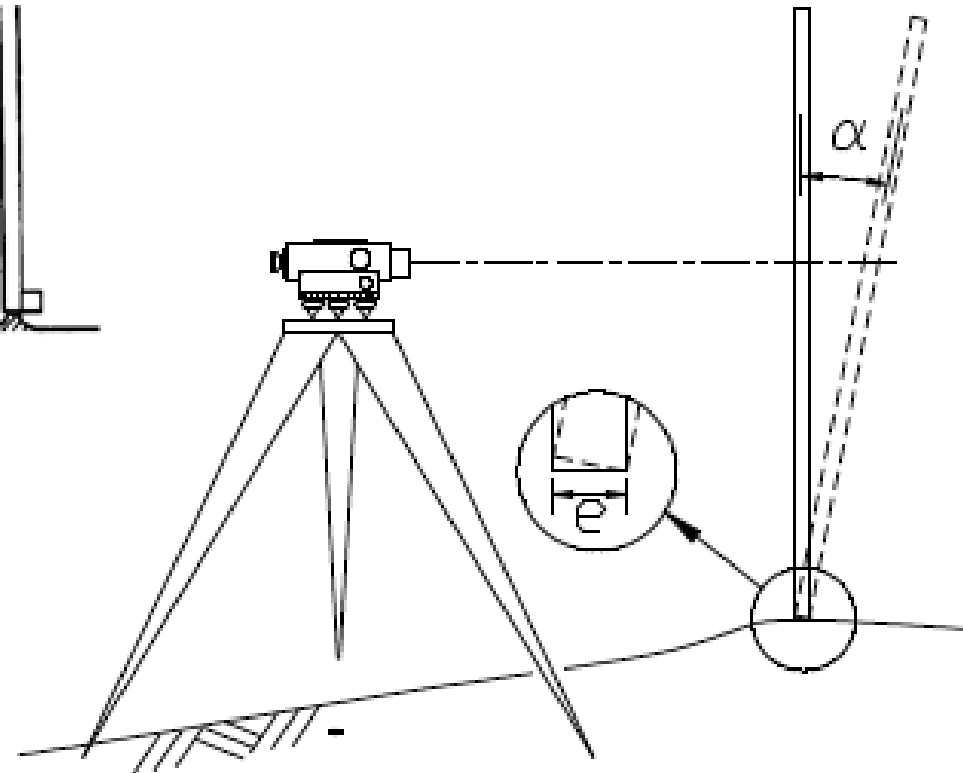
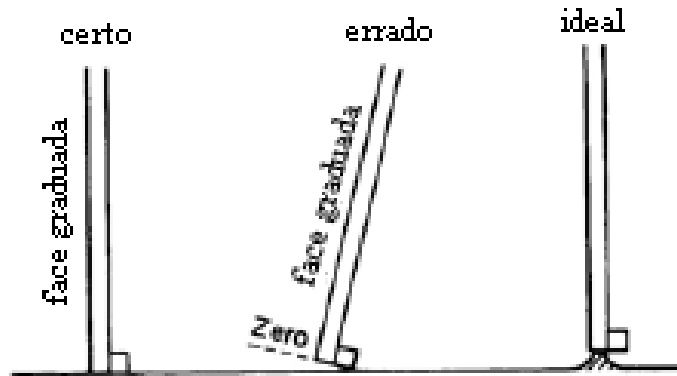


$$\varepsilon = 4 - AB = 4 - 4\cos 0.74 = 4(1 - \cos 0.74) = 0.3 \text{ mm}$$

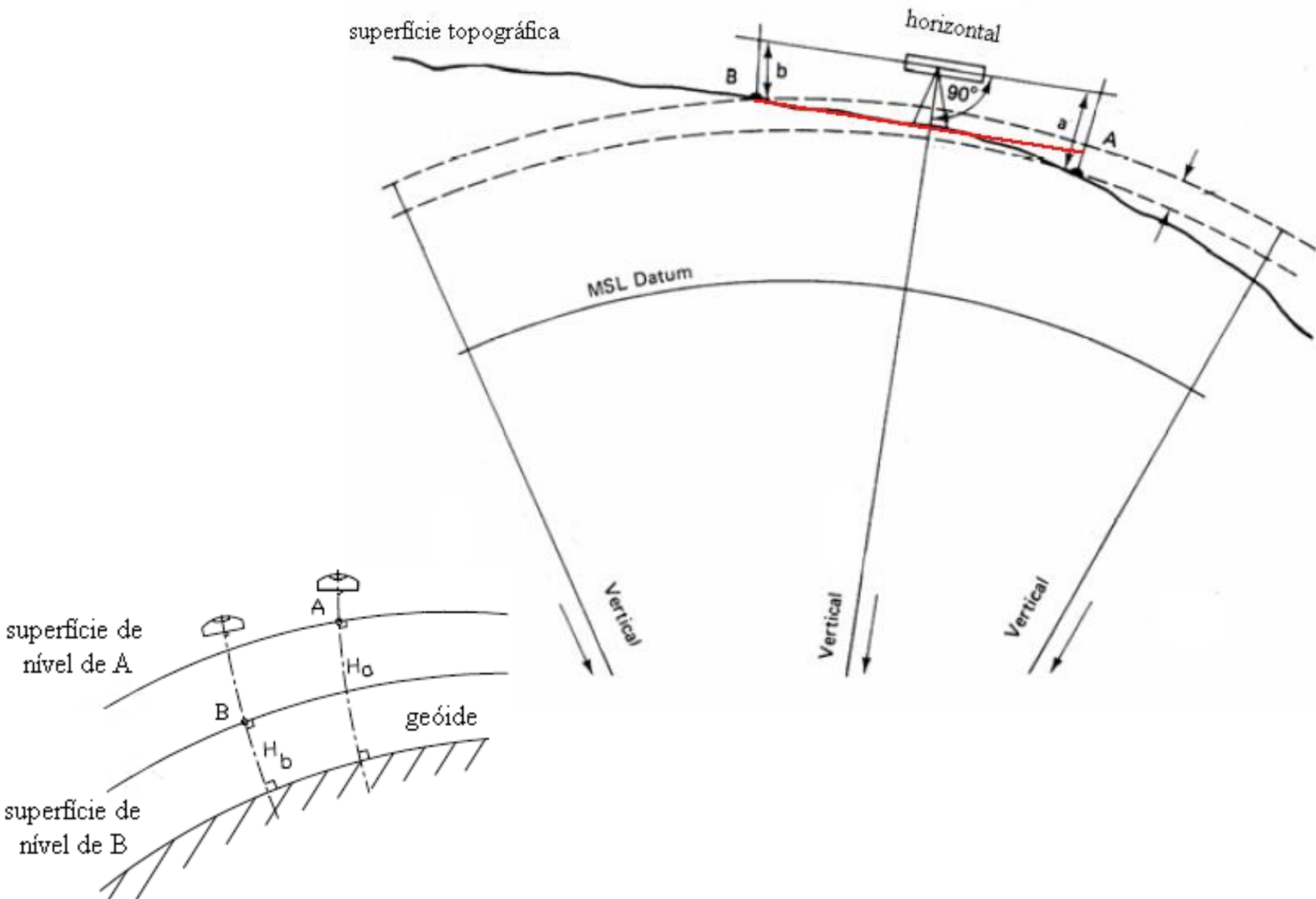
$$\begin{aligned} 2 \text{ mm} & \text{ --- } 8' \\ 10 \text{ mm} & \text{ --- } \alpha' \end{aligned}$$

# Nivelamento geométrico ou directo

O **efeito de levantamento** da mira devido à sua largura, quando esta está inclinada, tende a diminuir o erro  $\varepsilon$  anterior desde que a mira bascule para trás, tendo-se  $\varepsilon = m(1 - \cos \alpha) - e \tan \alpha$ , sendo  $e$  a largura da mira e  $m$  o comprimento da mira.

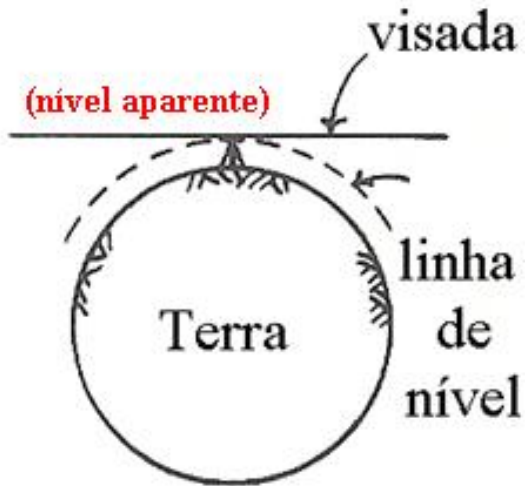


# Nivelamento geométrico ou directo



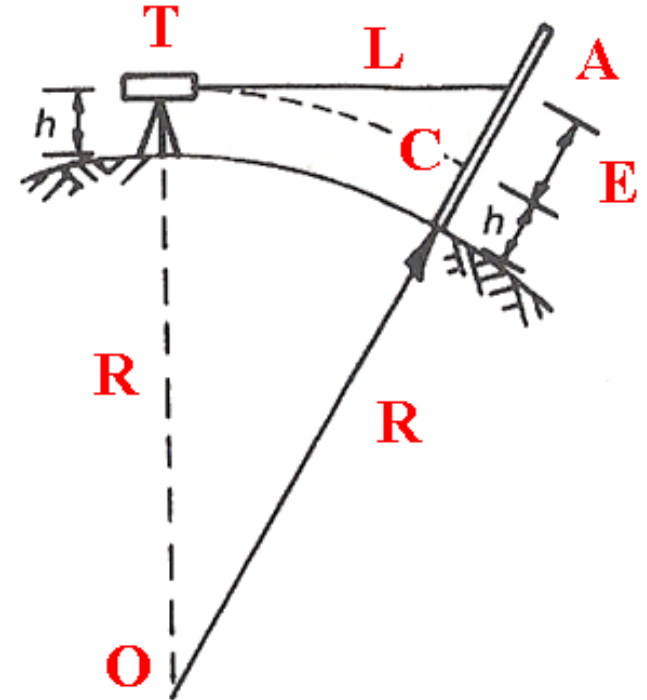


# Nivelamento geométrico ou directo



## Efeito de curvatura

A substituição do nível verdadeiro pelo nível aparente provoca um erro na determinação da altitude de um ponto do terreno, designado por **erro de curvatura da terra, E**.



Pelo teorema de Pitágoras, pondo  $E=AC$ ,  $R + h \approx R$ , o erro altimétrico E cometido ao considerar a visada TA em vez de TC é:

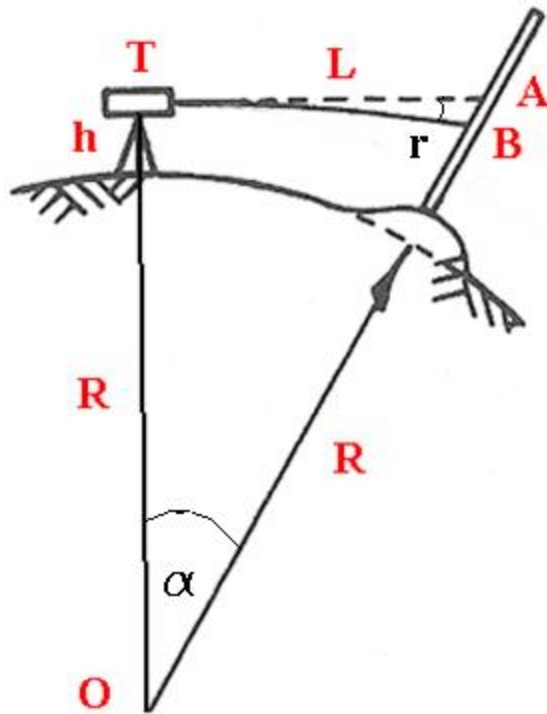
$$AO^2 = OT^2 + AT^2 \Rightarrow (E + (R+h))^2 = (R+h)^2 + L^2 \Rightarrow E^2 + 2RE + R^2 = R^2 + L^2$$

$$E = L^2 / (2R + E) \approx L^2 / 2R$$

Pondo  $R = 6380 \text{ km}$ ,  $E = L^2 \times 10^{-3} / 2 \times 6380 = 7.84 \times 10^{-8} L^2 \text{ m}$  (se  $L=30 \text{ m}$ ,  $E=0.07 \text{ mm}$ )

# Nivelamento geométrico ou directo

Quando se efectua uma visada de um ponto para outro, o raio luminoso sofre uma **refracção** ao atravessar as camadas atmosféricas de densidades diferentes, seguindo uma trajetória curva, situada sobre o plano vertical da estação, cujá concavidade é dirigida segundo a superfície do solo (na grande generalidade das situações). Como consequência, o ponto A, quando visado de T é visto em B, originando o erro de refração E:  $E = AB$ . A superfície TB é dita superfície de nível óptico.



A partir das observações efectuadas por Biot, tem-se que o ângulo de refração  $ATB = r$  é proporcional ao ângulo  $\alpha$  segundo a relação

$$r = n \frac{\alpha}{2} \quad \text{onde } n \text{ é o índice de refração. Da figura:}$$

$$\alpha = \frac{TB}{R} \approx \frac{L}{R} \quad \text{donde} \quad r = \frac{n L}{2 R}$$

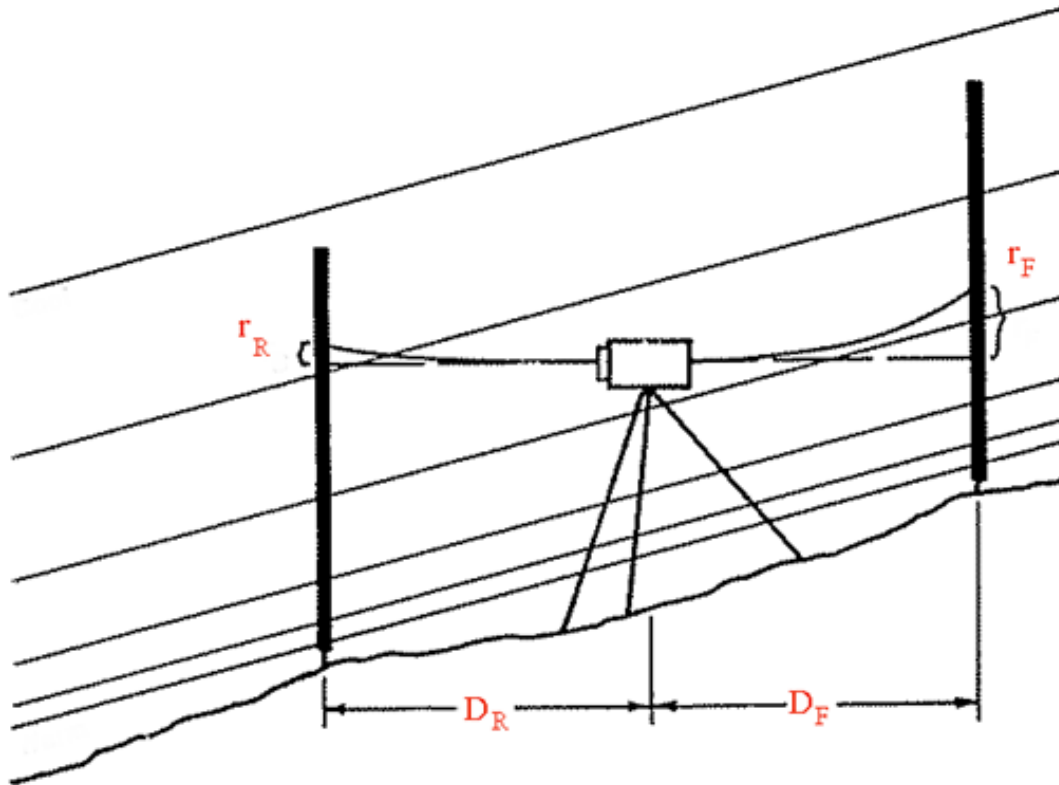
Como AB é pequeno:  $r = \frac{AB}{L}$  donde

$$AB = n \frac{L^2}{2R}$$

$$(n \approx 0.14)$$

**Efeito da refração**

# Nivelamento geométrico ou directo

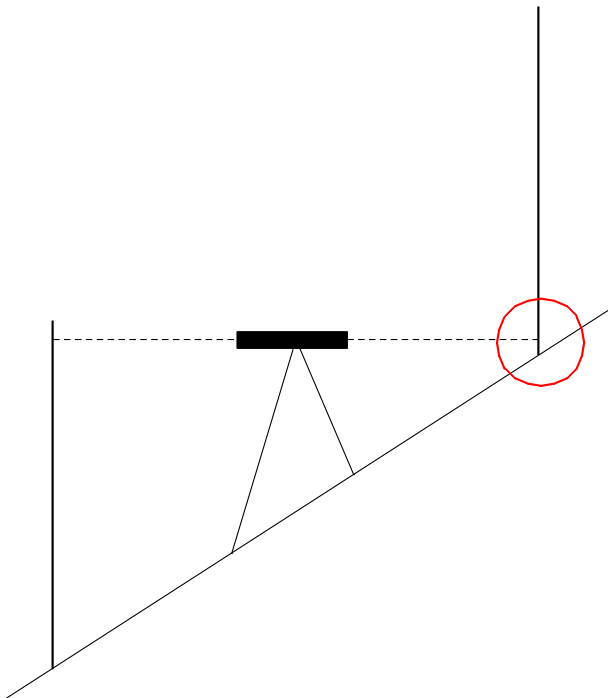
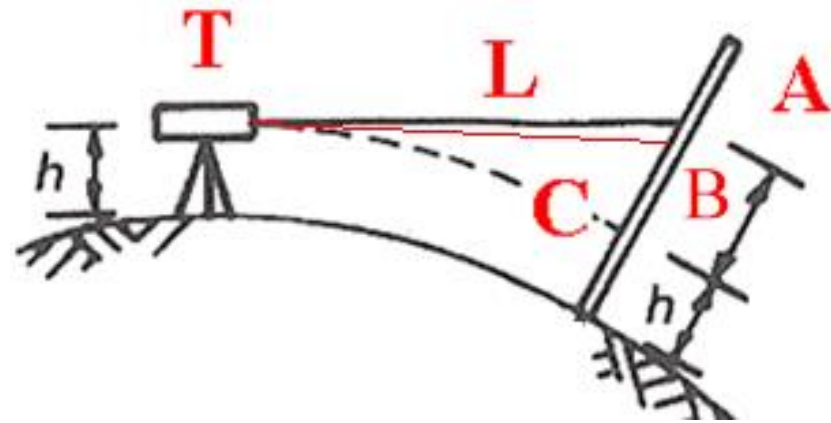


À medida que a altitude diminui, o ar torna-se mais denso, aumentando o coeficiente de refração.

Efeito da refração nas pontarias atrás (LR) e à frente (LF)

# Nivelamento geométrico ou directo

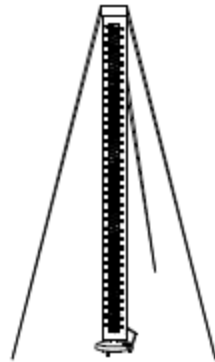
O efeito combinado da curvatura e da refração é  $BC=AC-AB=L^2(1-n)/2R$ . Quando a linha de visada está muito próxima do solo (o que pode acontecer em terreno inclinado na visada à mira no ponto mais alto), a refração é muito variável, podendo até ter valores negativos.



Em terreno inclinado, não utilizar completamente o comprimento da mira, já que os efeitos da refração são diferentes na proximidade imediata do solo, podendo falsear os resultados.

# Nivelamento geométrico ou directo

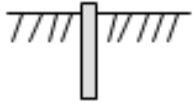
---



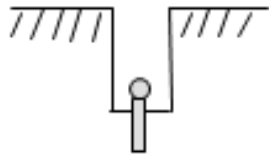
Em observações com sol descoberto, utilizar um guarda-sol para proteger o nível e mesmo na troca de estações o aparelho não deve ficar exposto ao sol.

# Nivelamento geométrico ou directo

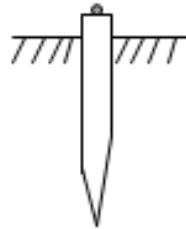
Moedas



Pistons



Estacas

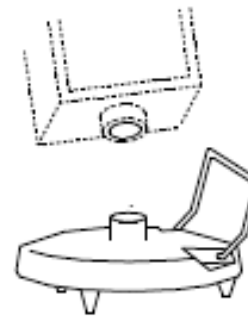


Sapatas

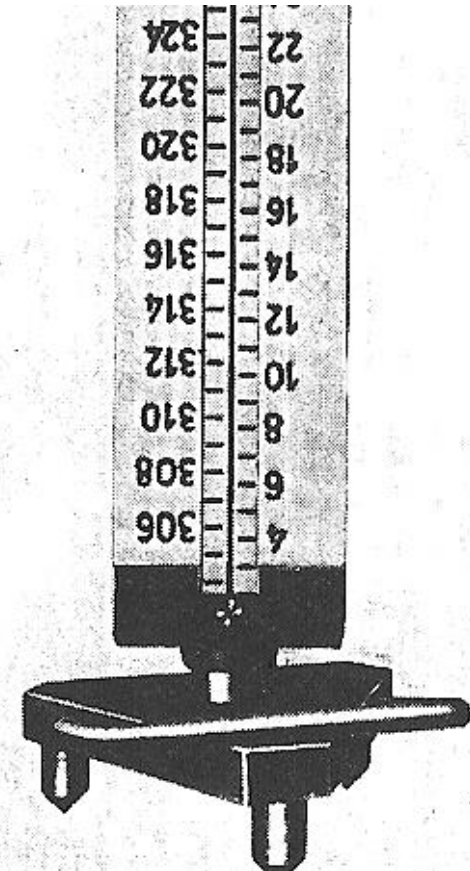


**Monumentalização dos pontos**

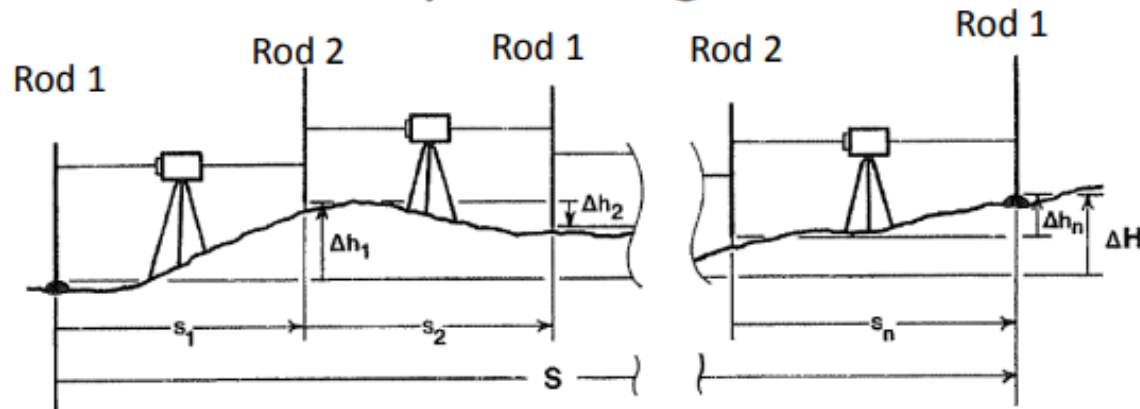
Um cuidado especial deve ser reservado às miras, concretamente na colocação em estação em pontos cuja altitude não se pretende determinar (pontos auxiliares, necessários devido à limitação da distância mira-aparelho): os apoios das miras (**sapatas**) devem estar bem fixos ao solo, de forma a que a respectiva **altitude permaneça inalterável** (dentro das centésimas de milímetro) durante as observações.



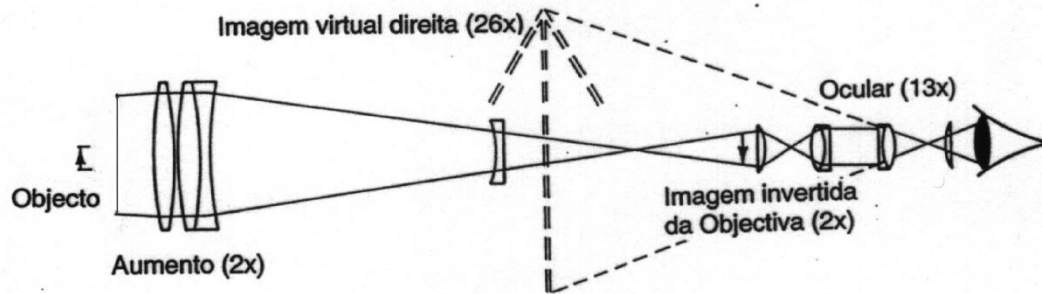
**sapatá**



- When using two rods label them “Rod 1” and “Rod 2”
- Come of your known bench mark with “Rod 1” and go into your known bench mark with “Rod 1”
- Leap frog your rods.
- This will eliminate any rod length errors.



# Nivelamento geométrico ou directo

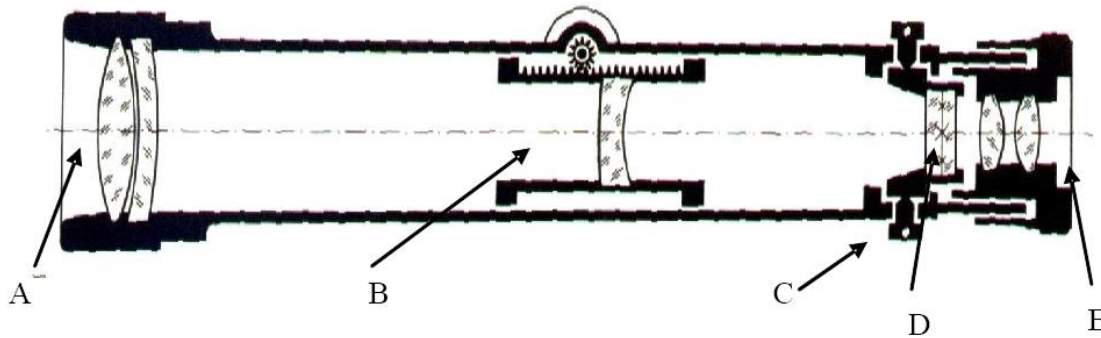


Uma luneta consiste num par de lentes convergentes: a **objectiva** e a **ocular**. A lente objectiva, de maior distância focal, produz uma imagem reduzida e invertida do objecto afastado; a lente ocular amplia a imagem produzida pela objectiva.



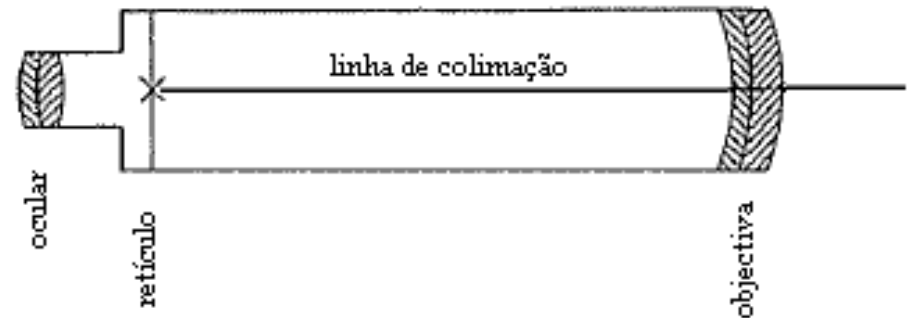


# Nivelamento geométrico ou directo



- A : Objetiva
- B : Sistema de focalização
- C : Parafusos de ajuste dos fios de retículo
- D : Retículos
- E : Ocular

## Princípio da luneta com retículo



**Os fios do retículo, que definem a linha de pontaria, estão colocados numa placa de vidro situada entre as duas lentes; esta placa pode mover-se para a frente e para trás através de um botão de focagem, de modo a colocar o retículo no plano de focagem.**

**Existe paralaxe da imagem quando a imagem do objecto, dada pela objectiva, não se forma sobre o plano do retículo.**

# Nivelamento geométrico ou directo



FS

FM

FI

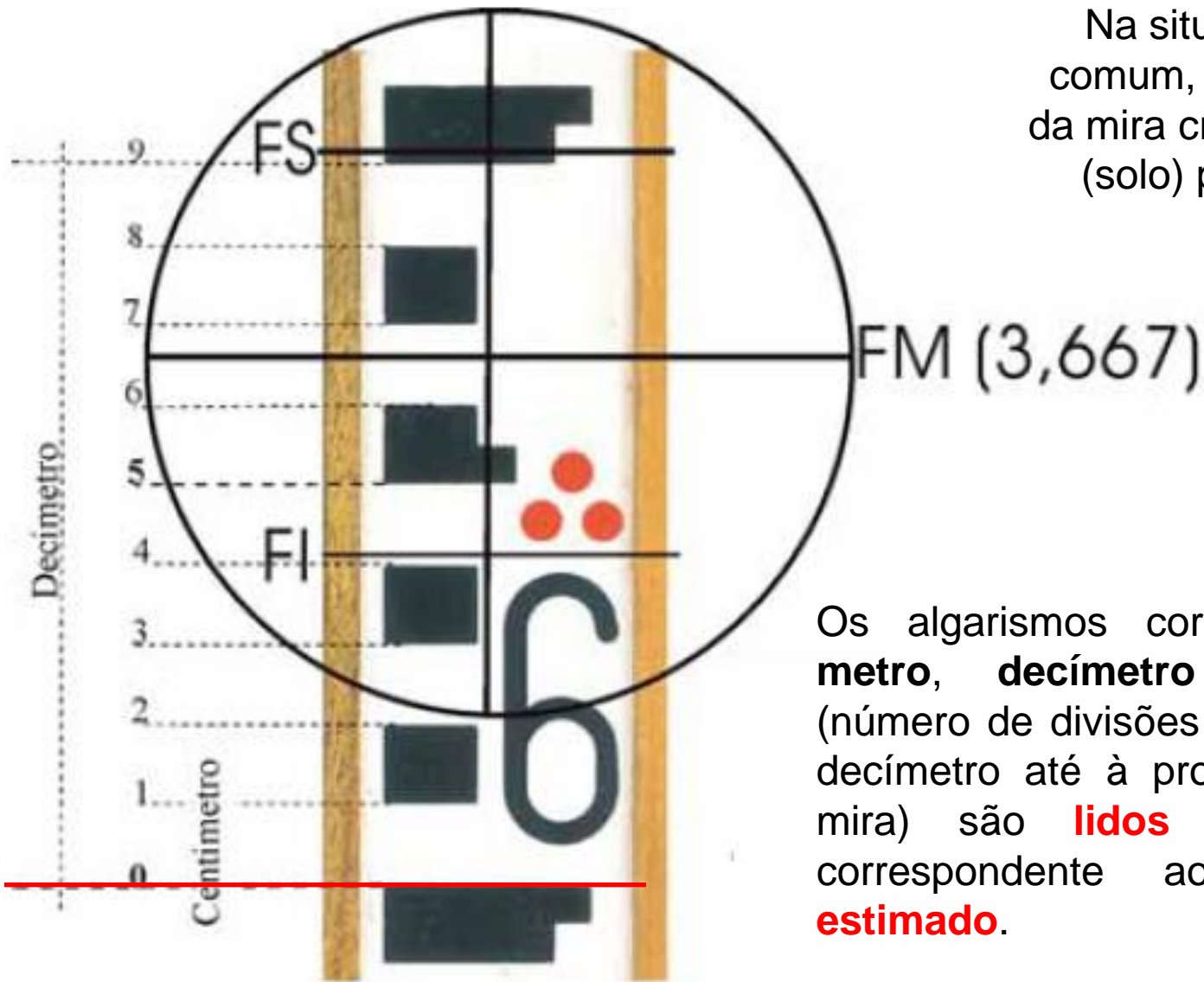
$$FM = (FS + FI) / 2$$

$$DH = (FS - FI) * 100$$

A **focagem** (dos fios do retículo e da imagem) é fundamental pois dela resulta uma melhor ou pior pontaria: deve focar-se em primeiro lugar os fios do retículo com o anel de focagem colocado na ocular e depois a imagem do campo visual, de tal forma a que as duas imagens não apresentem movimento uma em relação à outra (paralaxe, que pode provocar um erro na pontaria).

Para efeitos do **cálculo do desnível entre 2 posições da mira** utiliza-se a leitura do **fio médio**, enquanto que as leituras dos **fios superior e inferior** servem para o cálculo **das distâncias horizontais entre o aparelho e cada uma das miras** e para **confirmação da leitura do fio médio**.

# Nivelamento geométrico ou directo



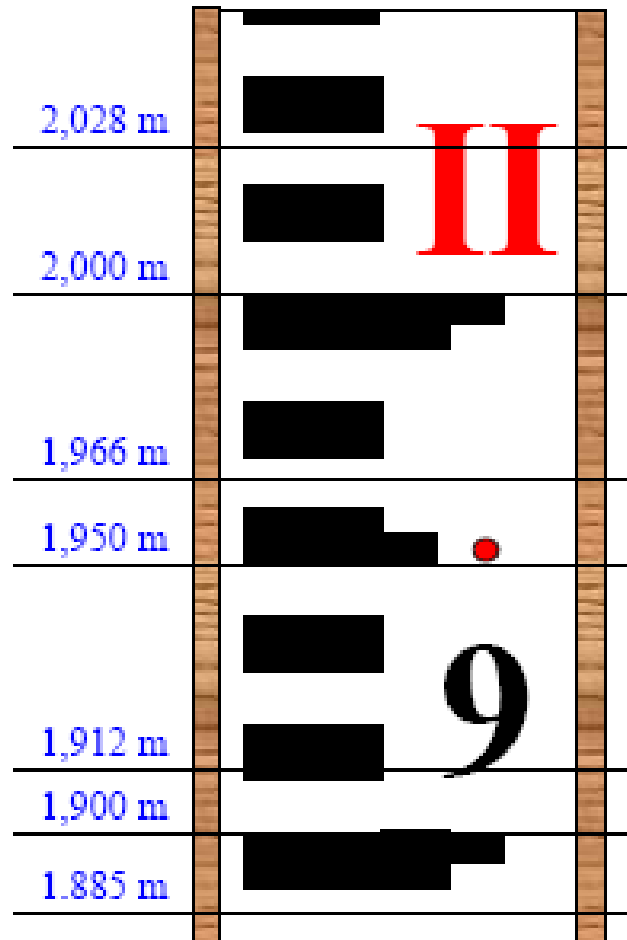
Na situação mais comum, a graduação da mira cresce da base (solo) para o topo

Os algarismos correspondentes ao **metro**, **decímetro** e **centímetro** (número de divisões desde a base do decímetro até à projecção do fio na mira) são **lidos** e o algarismo correspondente ao **milímetro** é **estimado**.

# Nivelamento geométrico ou directo

---

•	1 metro
• •	2
• • •	3



Mira e leituras

# Nivelamento geométrico ou directo

---

Indicar nas miras abaixo, as seguintes leituras:

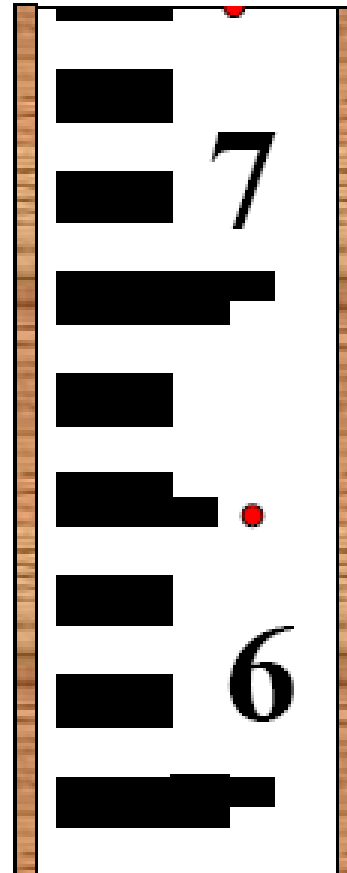
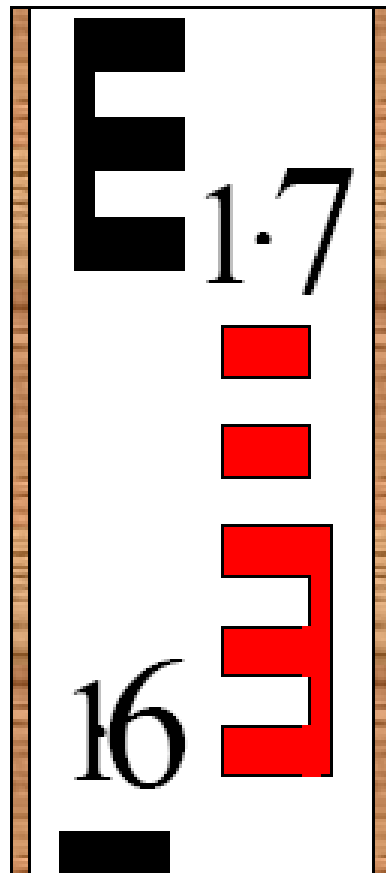
1,615m

1,705m

1,658m

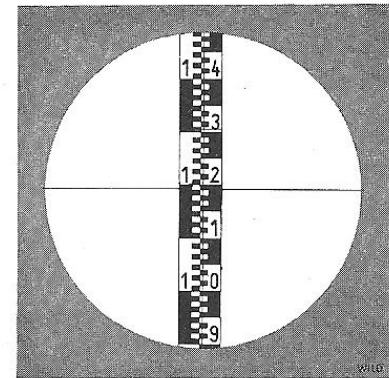
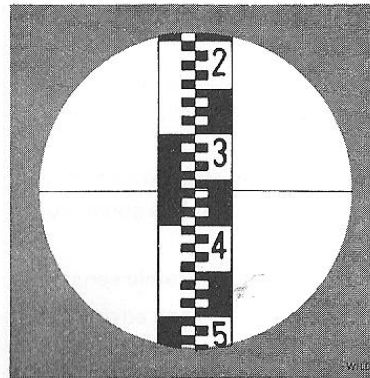
1,600m

1,725m



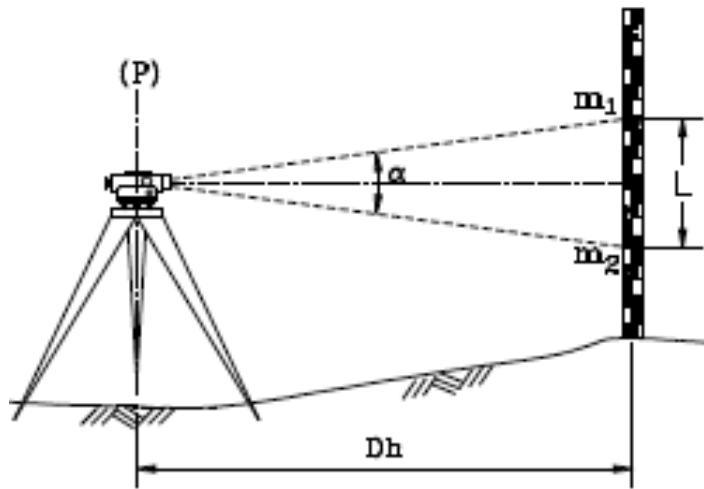
# Nivelamento geométrico ou directo

---



**A distância aparelho-mira  
influencia a precisão das  
leituras**

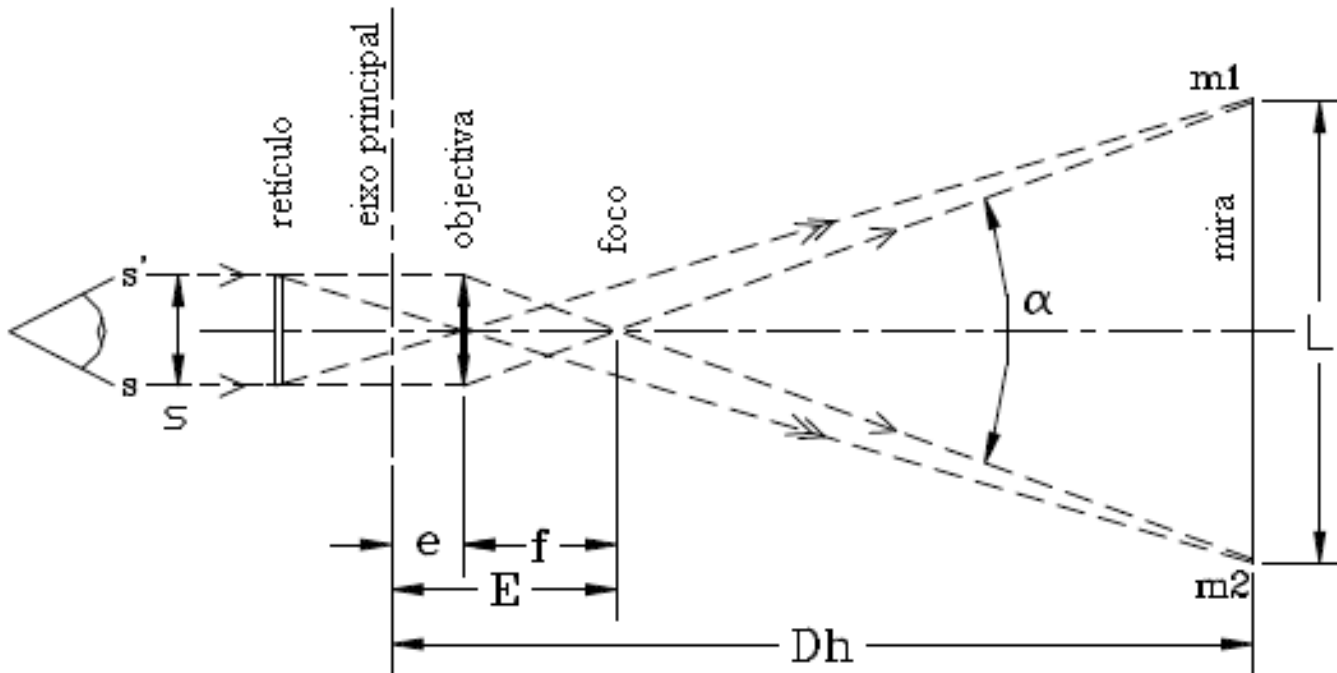
# Nivelamento geométrico ou directo



Fórmula estadimétrica:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{m_1 - m_2}{2}}{D_h - E} = \frac{s}{2f}$$

A relação **s/f** é uma constante do aparelho; **E** designa-se por constante aditiva ou analáctica e nos aparelhos modernos de focagem interna, pode reduzir-se a um valor negligenciável relativamente a  $D_h$ ; a constante estadimétrica  $K=f/s$  tem usualmente o valor 100.



$$D_h = K(m_1 - m_2)$$

# Nivelamento geométrico ou directo

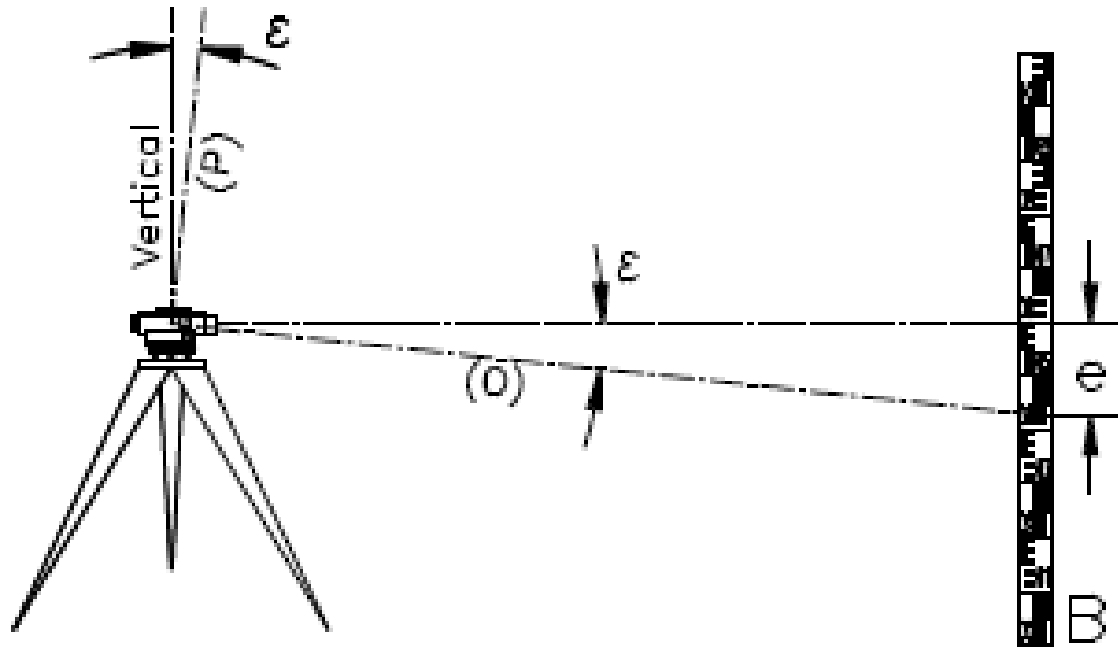
---

A distância entre o nível e a mira pode variar conforme o equipamento utilizado e a precisão pretendida. Observando a regra da igualdade das distâncias para as visadas atrás e à frente em cada estacionamento do aparelho, as influências sistemáticas que têm origem em erros do aparelho, assim como os efeitos da curvatura terrestre e da refração atmosférica ficam amplamente atenuados. Para este efeito, as distâncias (horizontais) podem ser medidas com uma fita métrica, dentro das tolerâncias adequadas. Mesmo com condições atmosféricas favoráveis, a distância entre o aparelho e as miras não deve ultrapassar **25 a 30 m** no caso de nivelamento de precisão e **60 m** no nivelamento ordinário.



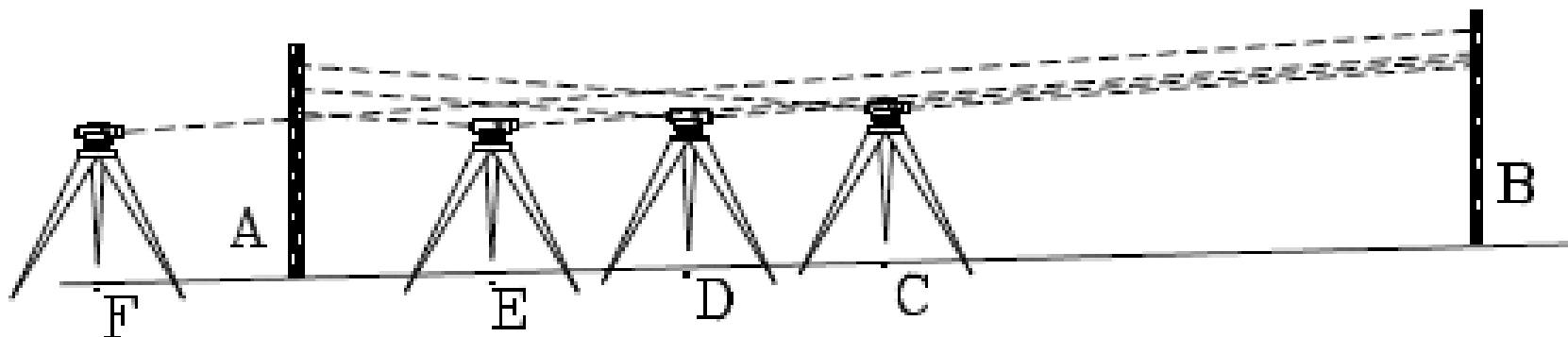
# Nivelamento geométrico ou directo

---



Devido a diversos erros instrumentais, o eixo óptico do nível não é geralmente paralelo à directriz do nível – **erro de colimação** -, constante ao longo de uma mesma operação. Este erro pode ser reduzido através de uma regulação apropriada (actuando sobre os fios do retículo) mas não pode totalmente eliminado. É por isso indispensável adoptar uma metodologia de observação que permita anular este erro.

# Nivelamento geométrico ou directo



Leituras efectuadas nas miras em A e B em cada estação C, D, E e F

estação	A (dm)	B (dm)
C	11,32	13,15
D	10,16	12,03
E	10,87	12,78
F	12,02	13,99

Influência do **erro de colimação** nas leituras efectuadas nas miras em A e B em cada estação C, D, E e F

estação	desnível $\Delta H_{AB}$ (dm)	diferença de distância às miras $\Delta D$ (m)
C	$11,32 - 13,15 = -1,83$	0
D		
E		
F		

# **Nivelamento geométrico ou directo**

---

Relativamente ao erro de horizontalização do nível (**erro de colimação**), deve-se considerar a precisão da bolha principal do nível e o comprimento da visada.

Para uma visada de 30m, a precisão de 0,25" resulta num erro vertical máximo de 0,036 mm.

# Nivelamento geométrico ou directo

## **Erro de pontaria:**

- 1. Pontaria ordinária (utilizando um traço):  $100/G$  (se  $G=20x$ , o erro de pontaria é igual a 5 dmgon, o que corresponde a 0.3mm a 35 m**
- 2. Pontaria por enquadramento ou bissecção:  $50 \text{ dmgon}/G$ , isto é, 0.15 mm a 35 m**

# Nivelamento geométrico ou directo

Numa mira com graduação centimétrica a incerteza angular da leitura é igual a  $4/G$  cgon; sendo  $G=24x$  a ampliação da luneta e se se pretender uma incerteza linear de **1mm** na leitura, a distância máxima nível-mira é:

$$D_{\max} = \frac{0.001 \text{ m}}{\frac{4}{24} \times 10^{-2} \frac{\pi}{200}} = 38 \text{ m}$$

Numa leitura numa mira de ínvar a incerteza angular varia de  $1/G$  a  $2/G$  cgon, o que, para  $G=40x$  e para uma precisão linear de **0.1 mm**:

$$D_{\max} = \frac{0.0001 \text{ m}}{\frac{2}{24} \times 10^{-2} \frac{\pi}{200}} = 46 \text{ m}$$

# **Nivelamento geométrico ou directo**

---

**As condições de construção de um nível são:**

- 1) Perpendicularidade entre o fio nivelador do retículo e o eixo principal**
- 2) Paralelismo entre a directriz da nivela e o eixo óptico da luneta**

**A primeira destas condições garante comodidade e precisão nas leituras sobre a mira; a segunda condição, mais importante, permite obter linhas de visada horizontais.**

# Nivelamento geométrico ou directo

---

Resumo:

## 1. Erros grosseiros:

- a) Esquecimento de calar a nivela, compensador bloqueado
- b) Confusão na leitura entre o traço nivelador e os traço estadimétricos ou confusão na unidade da graduação
- c) Má transcrição do valor lido para a caderneta

## 2. Erros sistemáticos:

- a) Erro de calibração da mira
- b) Falta de verticalidade da mira, nivela esférica desregulada
- c) Erro de falta de perpendicularidade entre o eixo principal e o eixo óptico (erro de inclinação do eixo óptico ou erro de colimação)
- d) Erro de funcionamento do compensador

## 3. Erros aleatórios ou acidentais:

- a) Erro de paralaxe devido a má focagem da luneta
- b) Erro de má leitura na mira na estimação do mm
- c) Escolha de um ponto pouco estável para colocação da mira
- d) Trepidação do ar em visadas próximas do solo
- e) Erro de pontaria

# Nivelamento geométrico ou directo

---



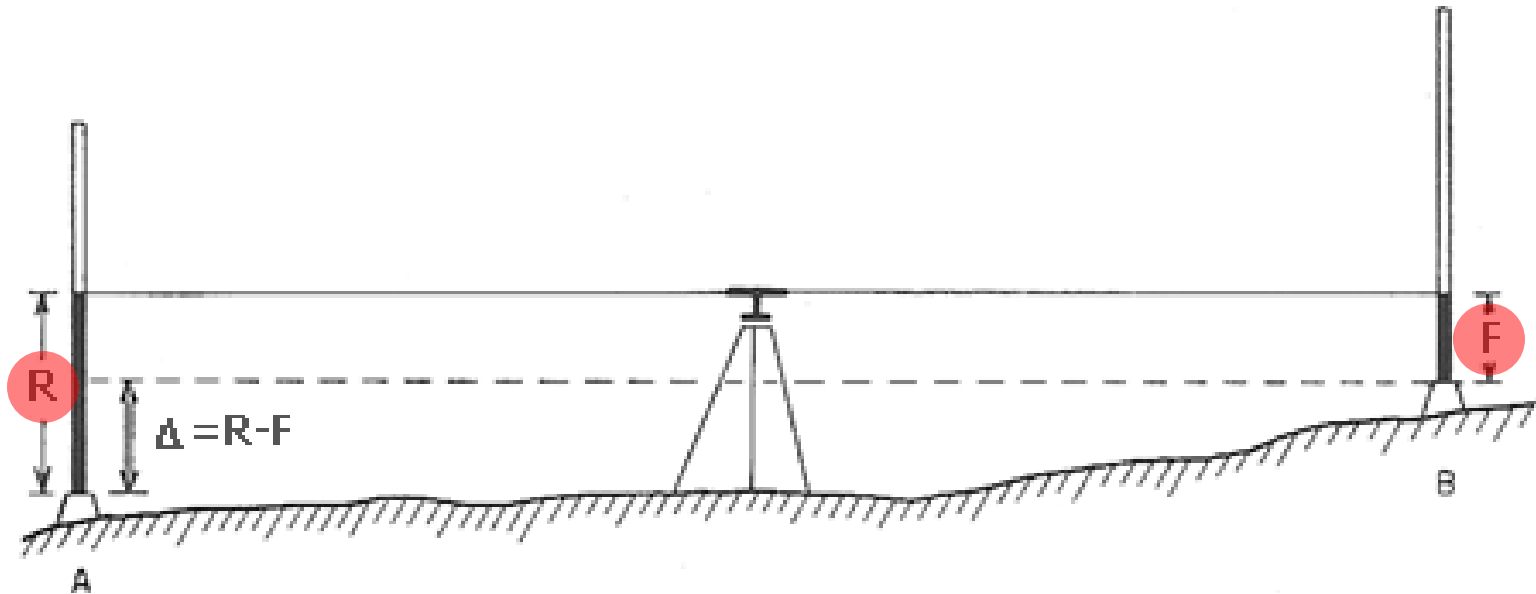
Um trabalho de nivelamento que pode ser realizado recorrendo à utilização de um único estacionamento do nível (no caso de os pontos A e B serem suficientemente próximos) designa-se por **nivelamento geométrico simples**.



# Nivelamento geométrico ou directo

---

**Desnível:** medição directa, resultante da diferença de “nível” observado nas miras colocadas verticalmente nos dois pontos A B, pela intersecção do plano horizontal de visada (plano de colimação perpendicular à vertical do lugar e tangente ao cruzamento dos fios do retículo).



# Nivelamento geométrico ou directo

---

As leituras R (ou  $I_A$ ) e F (ou  $I_B$ ) correspondem às alturas compreendidas entre os pontos A e B e a linha de visada horizontal, respectivamente. Obtém-se o desnível ou diferença de nível entre os pontos A e B efectuando a diferença entre as leituras:

$$\Delta_{AB} = R - F = I_A - I_B$$

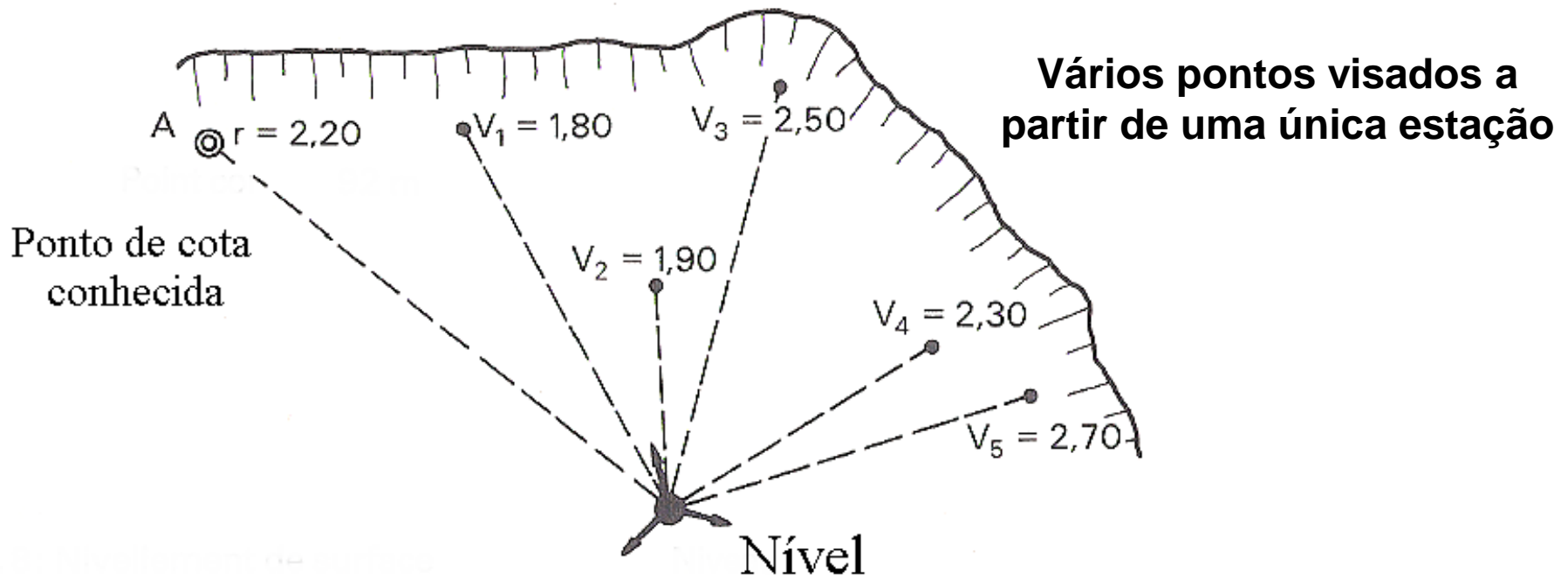
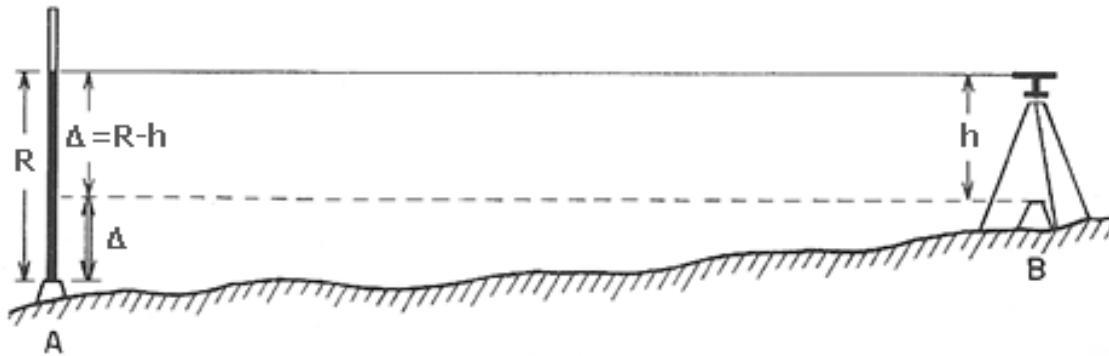
A linha de visada pode ser considerada como paralela à superfície de referência, tendo-se:

$$\text{altitude}_A + I_A = \text{altitude}_B + I_B$$

de onde se conclui que:

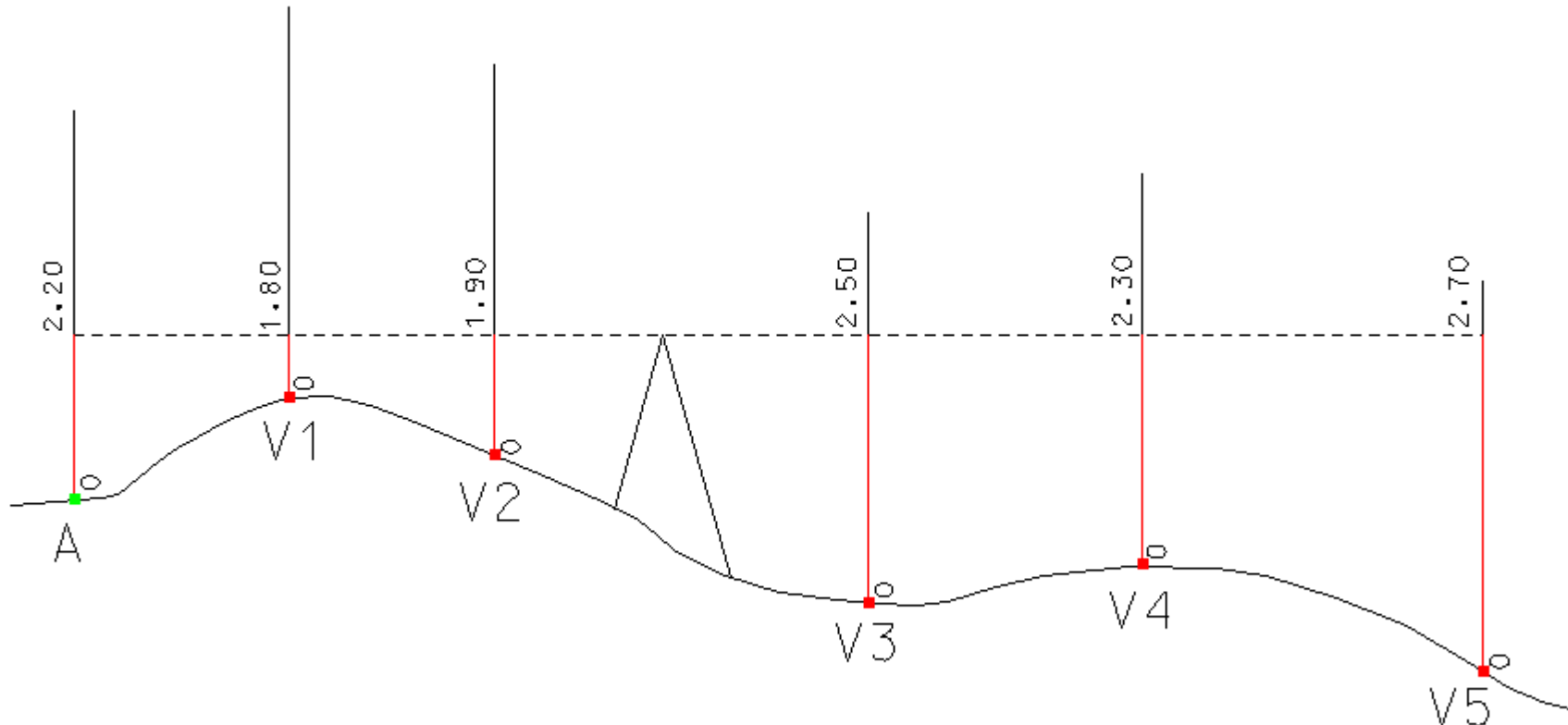
$$\text{altitude}_B = \text{altitude}_A + I_A - I_B = \text{altitude}_A + \Delta_{AB}$$

# Nivelamento geométrico ou directo



# Nivelamento geométrico ou directo

---



$$\text{alt A} + 2.20 = \text{alt V1} + 1.80 = \text{alt V2} + 1.90 = \text{alt V3} + 2.50 = \text{alt V4} + 2.30 = \text{alt V5} + 2.70$$

$$\text{alt V1} = \text{alt A} + 2.20 - 1.80 = \text{alt A} + 0.40$$

$$\text{alt V2} = \text{alt A} + 2.20 - 1.90 = \text{alt A} + 0.30$$

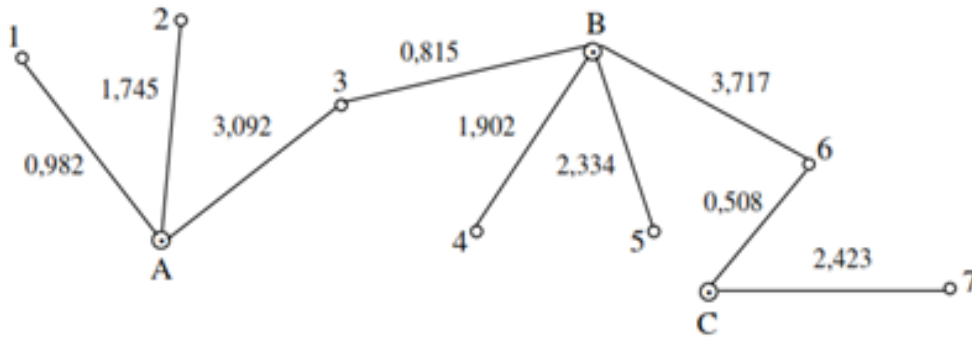
$$\text{alt V3} = \text{alt A} + 2.20 - 2.50 = \text{alt A} - 0.30$$

$$\text{alt V4} = \text{alt A} + 2.20 - 2.30 = \text{alt A} - 0.10$$

$$\text{alt V5} = \text{alt A} + 2.20 - 2.70 = \text{alt A} - 0.50$$

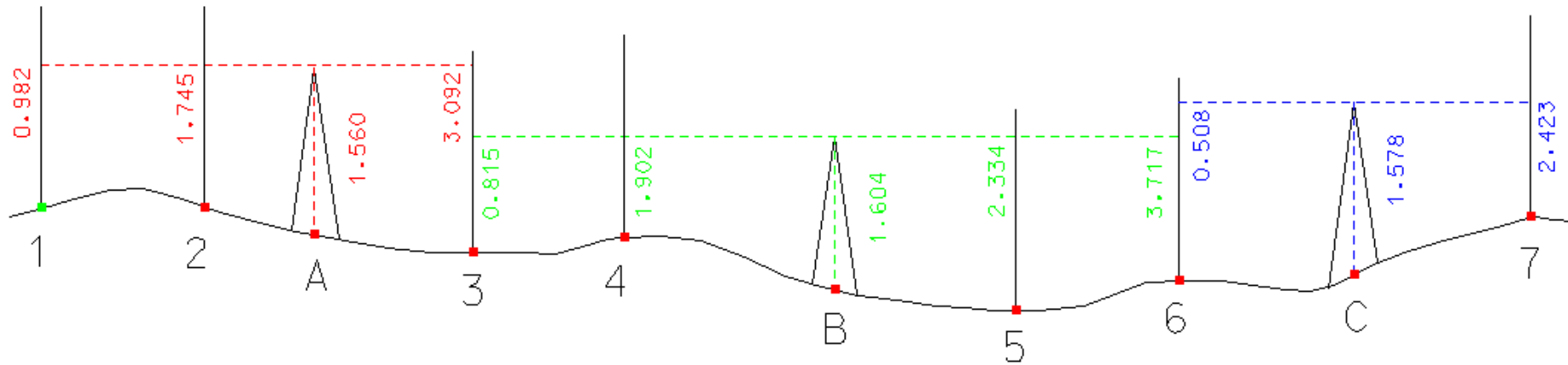
# Nivelamento geométrico ou directo

Exemplo: no croquis seguinte as letras A, B e C representam o local de **estacionamento do nível** e os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 o local de **estacionamento da mira**, indicando-se igualmente as leituras efectuadas em cada estação. As alturas do instrumento em A, B e C são 1.560 m, 1.604 m e 1.578 m, respectivamente. Complete o impresso de nivelamento geométrico (9 zonas sombreadas).



Estação	Ponto visado	Leituras (m)	Cota da estação	Cota da estaca
A	1	0.982	199.422	
	2	1.745		200.000
	3	3.092		199.237
				199.890
B	3	0.815	199.101	
	4	1.902		196.803
	5	2.334		196.371
	6	3.717		194.988
C	6	0.508	193.918	
	7	2.423		193.073

# Nivelamento geométrico ou directo



$$\text{alt1} + 0.9820 = \text{alt2} + 1.745 = \text{altA} + 1.560 = \text{alt3} + 3.092$$

200.982

$$\text{alt2} = 200.982 - 1.745 = 199.237$$

$$\text{altA} = 200.982 - 1.560 = 199.422$$

$$\text{alt3} = 200.982 - 3.092 = 197.890$$

$$\text{alt3} + 0.815 = \text{alt4} + 1.902 = \text{altB} + 1.604 = \text{alt5} + 2.314 = \text{alt6} + 3.717$$

198.705

$$\text{alt4} = 198.705 - 1.902 = 196.803$$

$$\text{altB} = 198.705 - 1.604 = 197.101$$

$$\text{alt5} = 198.705 - 2.334 = 196.371$$

$$\text{alt6} = 198.705 - 3.717 = 194.988$$

$$\text{alt6} + 0.508 = \text{altC} + 1.578 = \text{alt7} + 2.423$$

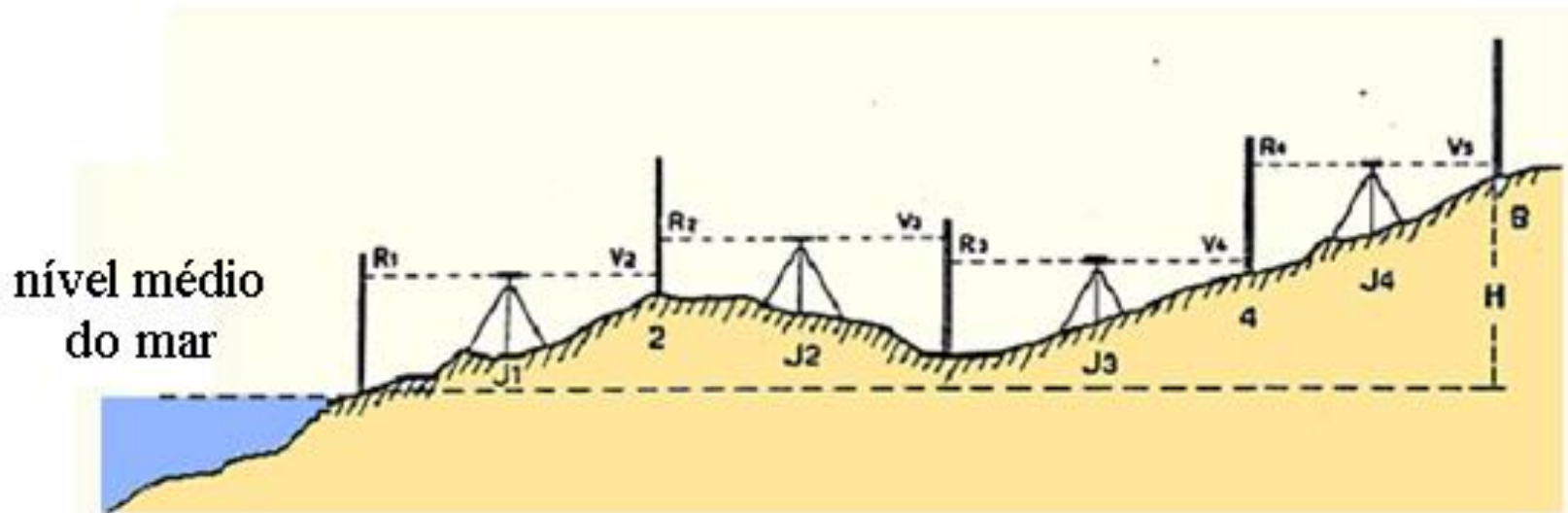
194.988

$$\text{altC} = 195.496 - 1.578 = 193.918$$

$$\text{alt7} = 195.496 - 2.423 = 193.073$$

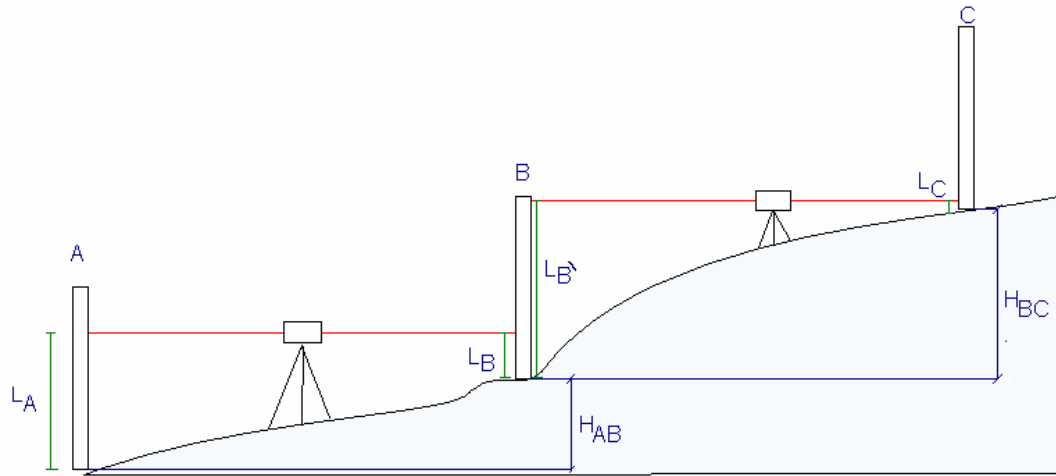
# Nivelamento geométrico ou directo

Normalmente tem interesse atribuir alt a pontos afastados da marca de nivelamento com alt conhecida, sendo necessário percorrer uma linha de nivelamento, ocupando diversas estações: **nivelamento geométrico composto**.



# Nivelamento geométrico ou directo

## Linha de nivelamento



$$\Delta_{AB} = L_A - L_B$$

$$\Delta_{BC} = L_{B'} - L_C$$

...

$$\text{altitude}_Z = \text{altitude}_A + \Sigma \text{desníveis}$$



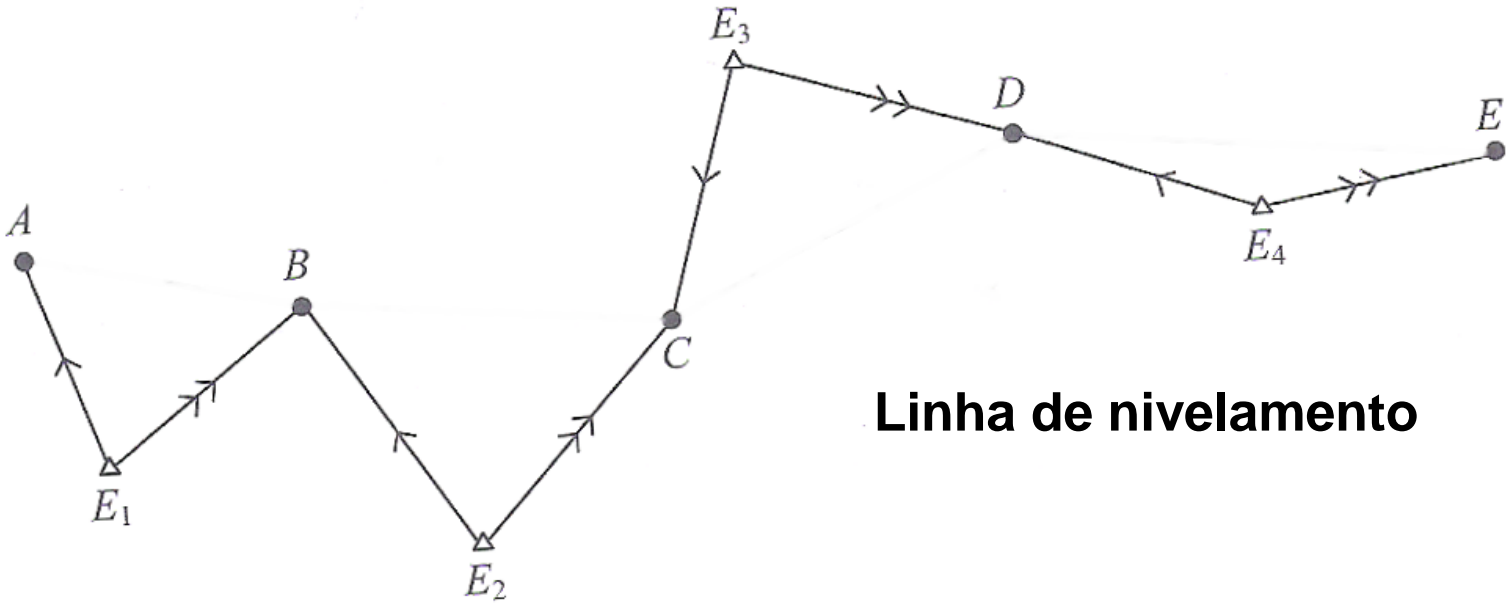


# Nivelamento geométrico ou directo

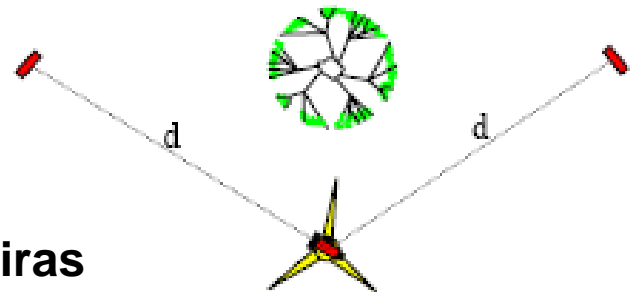
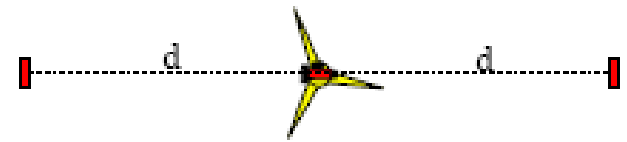
		Mira atrás	Distância	Mira à frente	Distância	Desnível	Cota	Correcção	Cota
	fs		$(fs-fi)*100$						
	fi								
	$(fs+fi)/2$								
	fM								
	fs		$(fs-fi)*100$						
	fi								
	$(fs+fi)/2$								
	fM								
	fs		$(fs-fi)*100$						
	fi								
	$(fs+fi)/2$								
	fM								
	fs		$(fs-fi)*100$						
	fi								
	$(fs+fi)/2$								
	fM								
	fs		$(fs-fi)*100$						
	fi								
	$(fs+fi)/2$								
	fM								

		Mira atrás	Distância	Mira à frente
	fs		$(fs-fi)*100$	
	fi			
	$(fs+fi)/2$			
	fM			

# Nivelamento geométrico ou directo



**Linha de nivelamento**



**O nível não tem que ficar no enfiamento das miras**

# Nivelamento geométrico ou directo

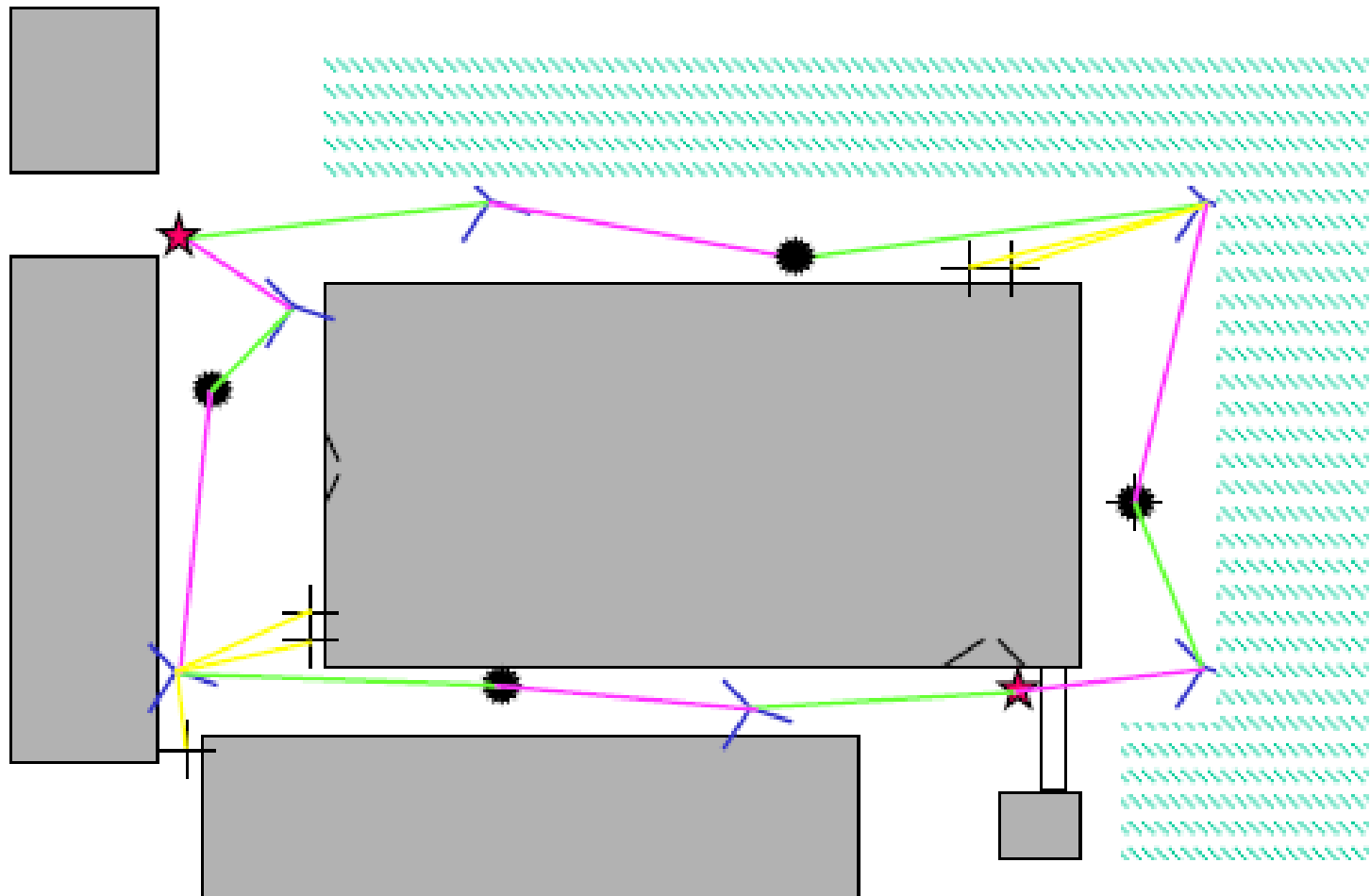
---

Durante a observação de uma linha de nivelamento, é suficiente a utilização de uma mira, embora a utilização de duas miras agilize o processo.

**O instrumento e a(s) mira(s) nunca se movem em simultâneo.**



# Nivelamento geométrico ou directo



cota conhecida



cota desconhecida



posição do nível



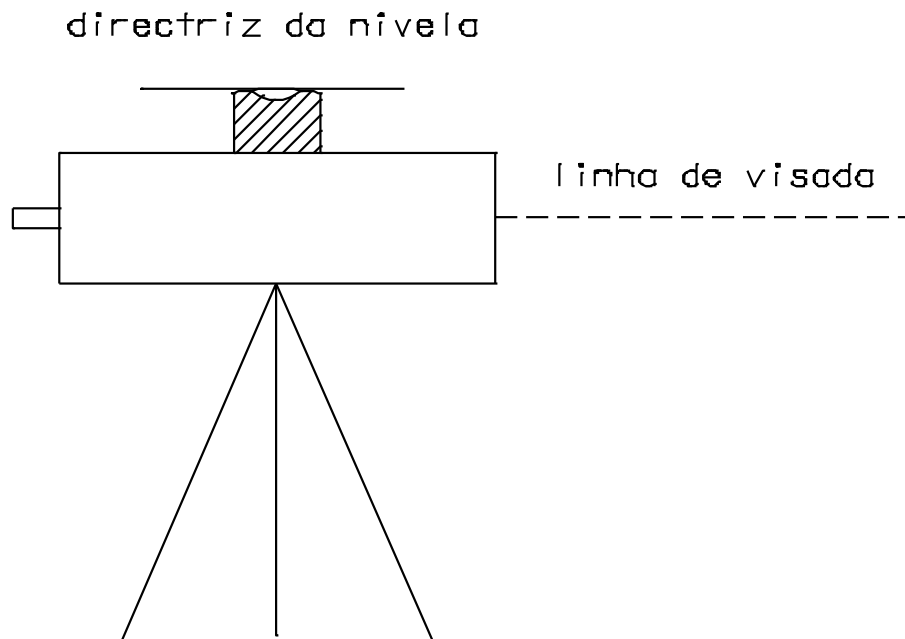
LR

LF

# Nivelamento geométrico ou directo

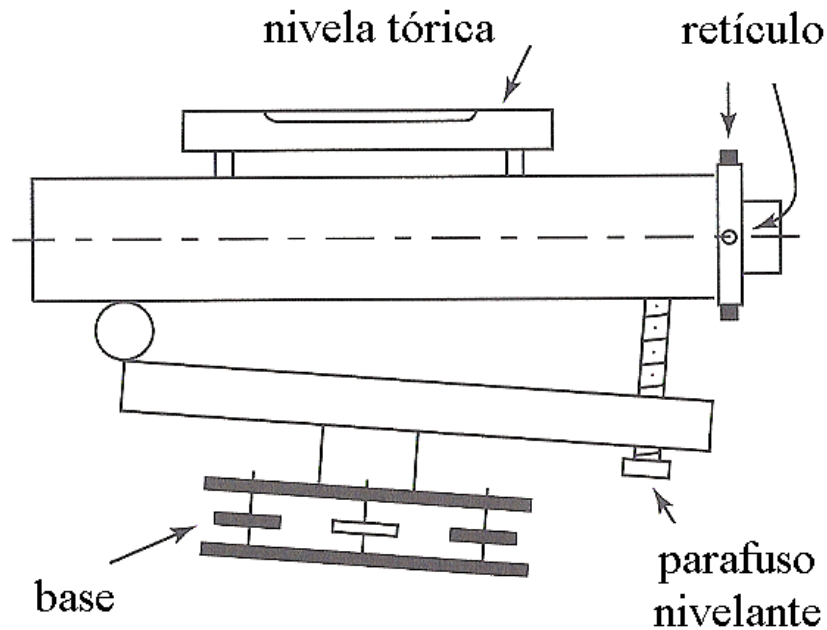
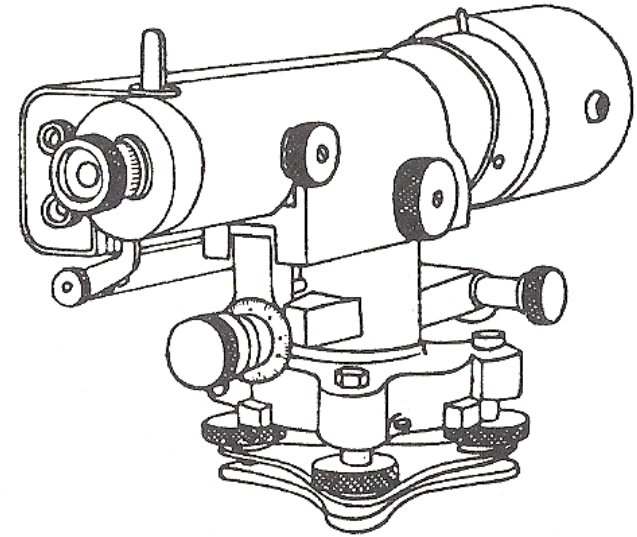
---

Os níveis podem classificar-se em **níveis de nivela solidária** e em **níveis automáticos**. Estando um nível construído segundo a respectiva idealização teórica, quando a nivela está calada a linha de pontaria está horizontal (e o fio nivelador igualmente horizontal). O conjunto luneta-nivela pode rodar em torno do eixo principal. O nível monta-se sobre um tripé e na sua base existem três parafusos nivelantes que permitem



verticalizar o eixo principal. O nível dispõe dum parafuso que permite bascular ligeiramente o bloco luneta-nivela e calar rigorosamente a nivela.

# Nivelamento geométrico ou directo



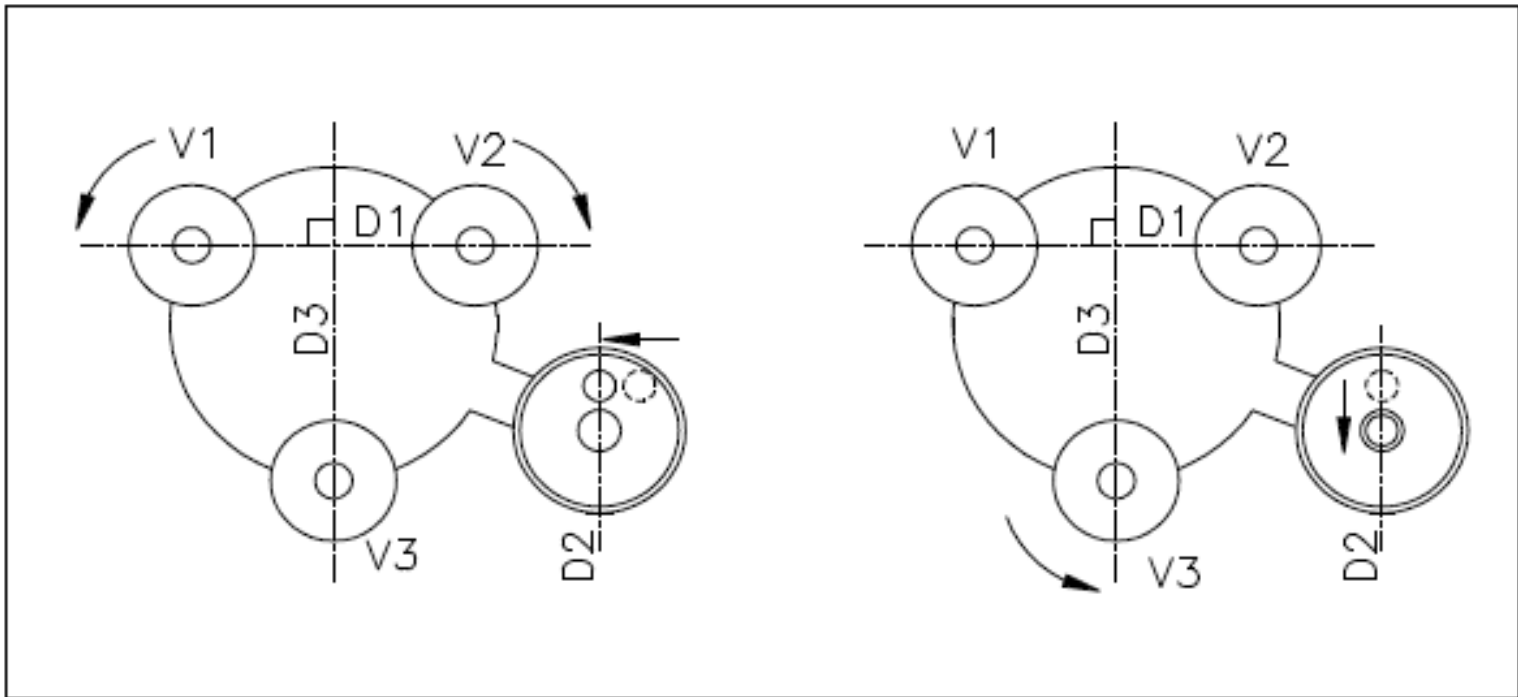
**Wild N3: nível de nivela solidária**

# Nivelamento geométrico ou directo



**Wild N3: modelo actual**

# Nivelamento geométrico ou directo



Calagem da nivela **esférica** através dos parafusos nivelantes  
(definição de um plano horizontal)



# Nivelamento geométrico ou directo

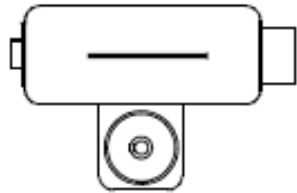
A calagem da nivela esférica não é muito precisa pois esta tem uma sensibilidade fraca; por exemplo, no caso do nível **Leica NA20**, a sensibilidade da nivela esférica é igual a **8' / 2 mm**, a que corresponde um deslocamento angular de  $14.81 \approx 15$  cgon para um deslocamento linear de 2 mm. Um erro de calagem da bolha igual a 0.2 mm traduz-se portanto num erro angular igual a:

$$\begin{array}{l} 15 \text{ cgon} \leftrightarrow 2 \text{ mm} \\ \alpha \leftrightarrow 0.2 \text{ mm} \end{array} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{0.2 \times 15}{2} = 1.5 \text{ cgon}$$

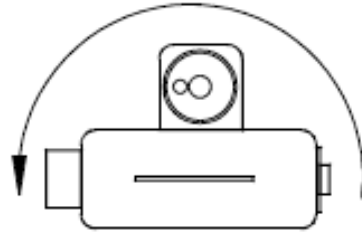
Para uma visada numa mira colocada a 35 m, um erro de calagem desta magnitude dá origem a um erro de leitura  $e = 35 \tan \alpha \approx 8$  mm. Se a mira for graduada em cm, um erro de leitura com esta incerteza não é aceitável.

# Nivelamento geométrico ou directo

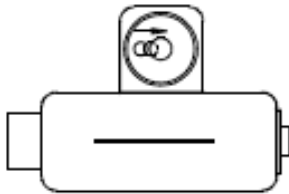
---



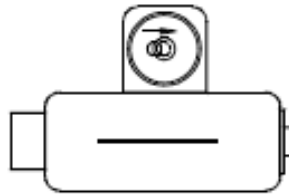
**(1) calagem da nivela**



**(2) rotação de 180° da luneta**



**(3) correcção de metade do erro utilizando o parafuso de regulação da nivela**



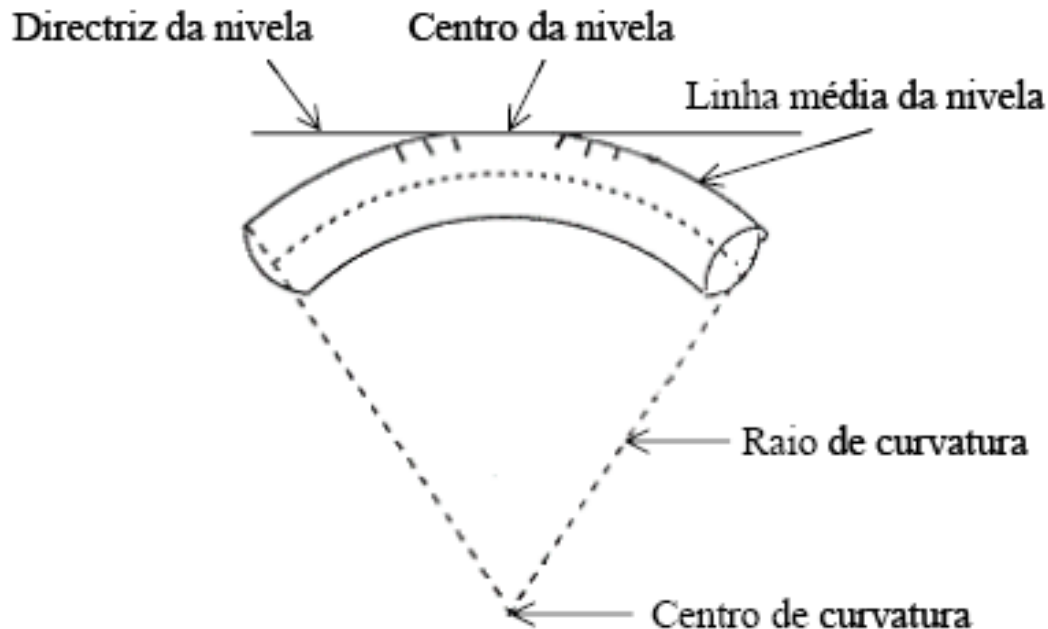
**(4) calagem da nivela utilizando os parafusos nivelantes**



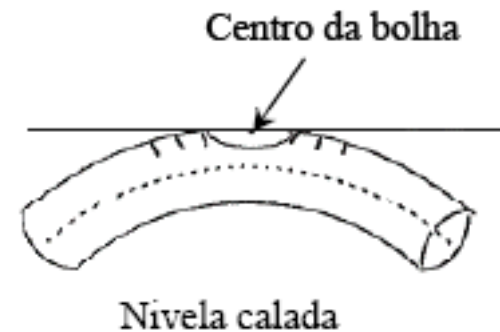
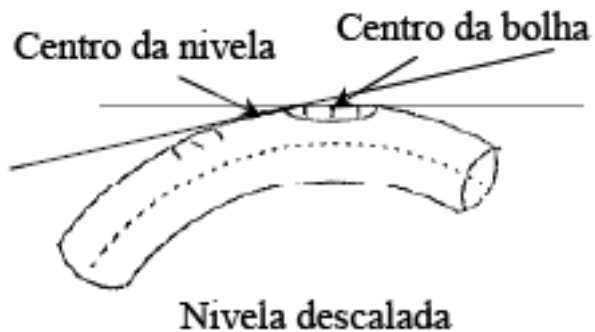
## Rectificação da nivela esférica

# Nivelamento geométrico ou directo

---



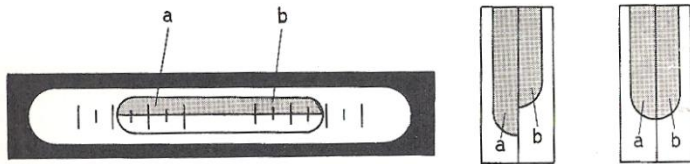
Nivela **tórica**



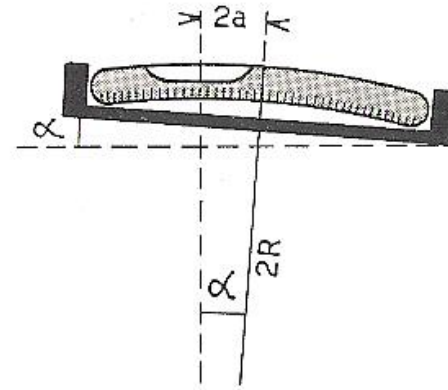
# Nivelamento geométrico ou directo



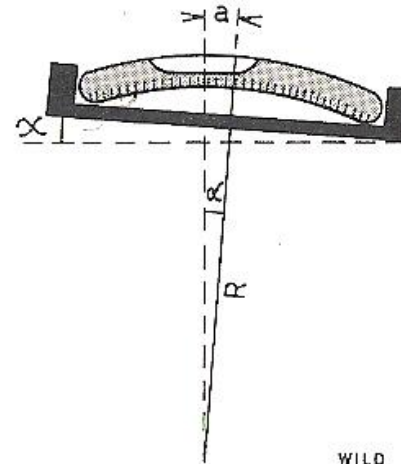
Nivela tórica para definir uma direcção horizontal



Calagem da bolha por coincidência das imagens das duas extremidades



mais sensível  
(raio de curvatura  $2R$ )



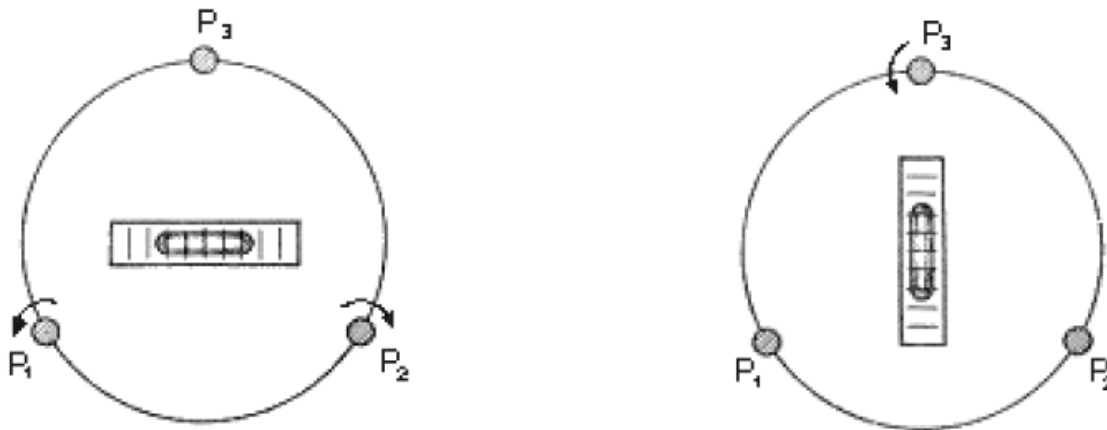
menos sensível  
(raio de curvatura  $R$ )

A mesma inclinação  $\alpha$  provoca um deslocamento  $a$  na nivela menos sensível e um deslocamento  $2a$  na nivela mais sensível

# Nivelamento geométrico ou directo

---

- 1) Colocar a nivela de modo que a directriz desta fique aproximadamente paralela ao plano vertical que passa por dois dos parafusos nivelantes;
- 2) Rodar esses dois parafusos em sentidos contrários até calar a nivela;
- 3) Rodar a nivela de 100 graus em torno do eixo principal;
- 4) Voltar a calar a nivela rodando agora apenas o terceiro parafuso nivelante.



Representação esquemática dos parafusos nivelantes de um teodolito e da nivela tórica, durante o procedimento de verticalização do eixo principal.

**Calagem da nivela **tórica** através dos parafusos nivelantes**  
**(definição de uma direcção horizontal)**

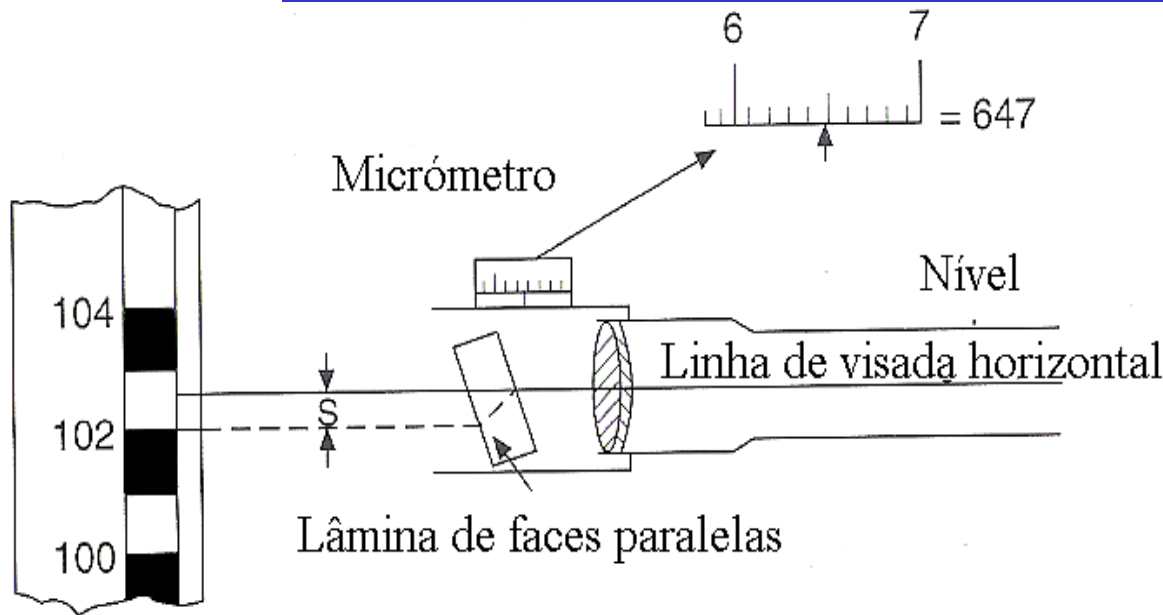
# **Nivelamento geométrico ou directo**

---

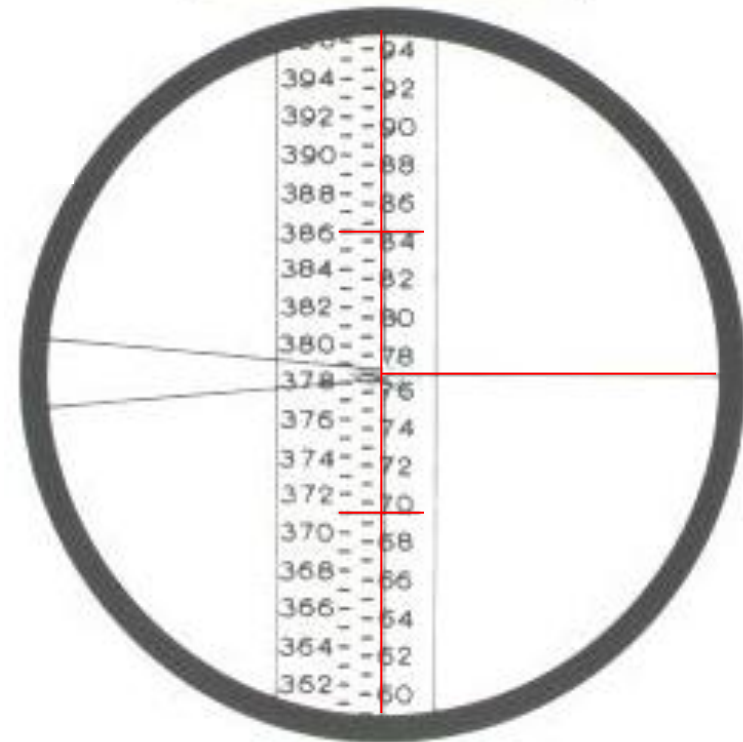
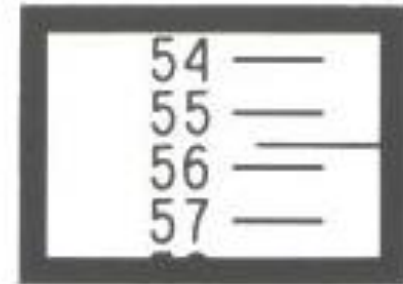
**A calagem da nivela esférica permite aproximar o eixo principal da vertical, permitindo que o compensador funcione correctamente.**

**Nos níveis não automáticos, que recorrem a uma nivela tórica para uma horizontalização precisa da linha de visada, a respectiva calagem tem que ser efectuada para cada pontaria.**

# Nivelamento geométrico ou directo



o centésimo de mm é estimado

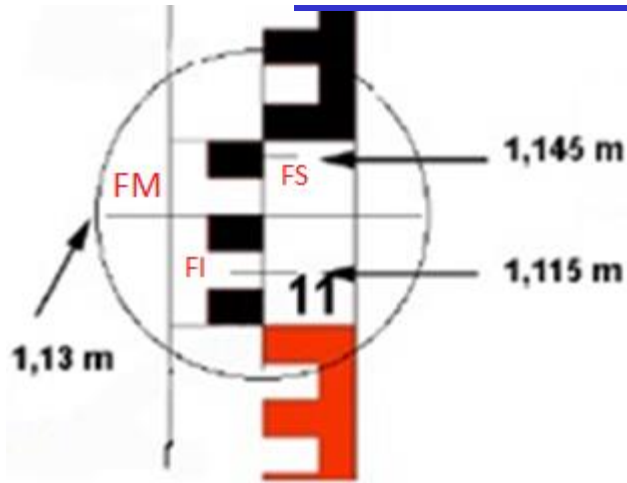


Utilizando a lâmina de faces paralelas leva-se o **traço médio** do retículo a coincidir com a **transição entre dois traços centimétricos**, sendo esta translação vertical registada no micrómetro, que tem um curso igual a 1 cm. Assim, na mira são **lidos** o **metro**, o **decímetro** e o **centímetro**, completando-se a leitura no micrómetro, **lendo-se** o **milímetro** e o **décimo de milímetro** e **estimando-se** o centésimo de milímetro. As leituras correspondentes aos **fios superior e inferior** são efectuadas apenas na miras, estimando-se o milímetro.

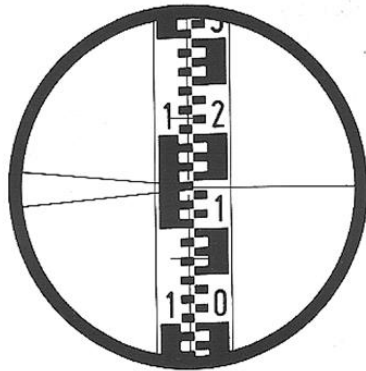
**Fio médio: 0.77556 m**

# Nivelamento geométrico ou directo

NA2, NA2+GPM3=NAK2



Com lâmina de faces paralelas: o mm é estimado para os fios superior e inferior, para o fio médio a leitura é completada no micrómetro



fio superior: 1.216 m  
fio médio: 1.143 m  
fio inferior: 1.068 m

Para o nivelamento de precisão aplica-se ao NA2 a lâmina de faces paralelas GPM3, sendo o conjunto designado por NAK2. Rodando o botão do micrómetro, a lâmina de faces paralelas bascula sobre o eixo horizontal, dando origem a um deslocamento paralelo da linha de pontaria, para cima ou para baixo, movimento cuja amplitude máxima é igual a **1 cm, correspondendo a um intervalo da menor divisão da mira**. Acertando o traço médio do retículo com uma graduação certa da mira, regista-se o valor do metro, decímetro e centímetro lidos na mira e no micrómetro regista-se o milímetro, décimo de milímetro e centésimo de milímetro, este último por estimação. **A leitura 50 no micrómetro corresponde à posição vertical da lâmina de faces paralelas, na qual a linha de pontaria não sofre qualquer deslocamento**. A leitura na mira é assim sempre 5 mm superior ao horizonte verdadeiro do instrumento, o que não tem qualquer importância já que estes 5 mm estão incluídos nas leituras atrás e à frente, sendo eliminados na diferença destas leituras.

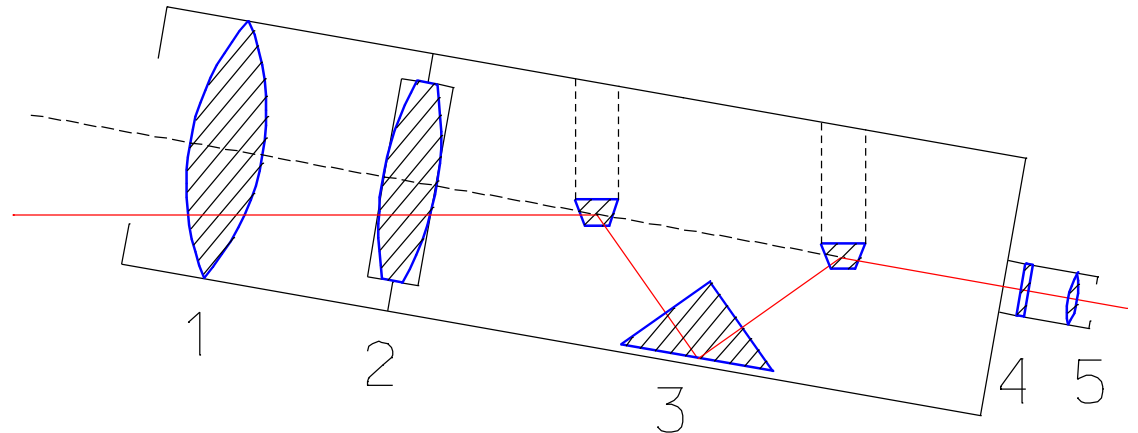
Sem lâmina de faces paralelas: o mm é estimado para os 3 fios



# Nivelamento geométrico ou directo

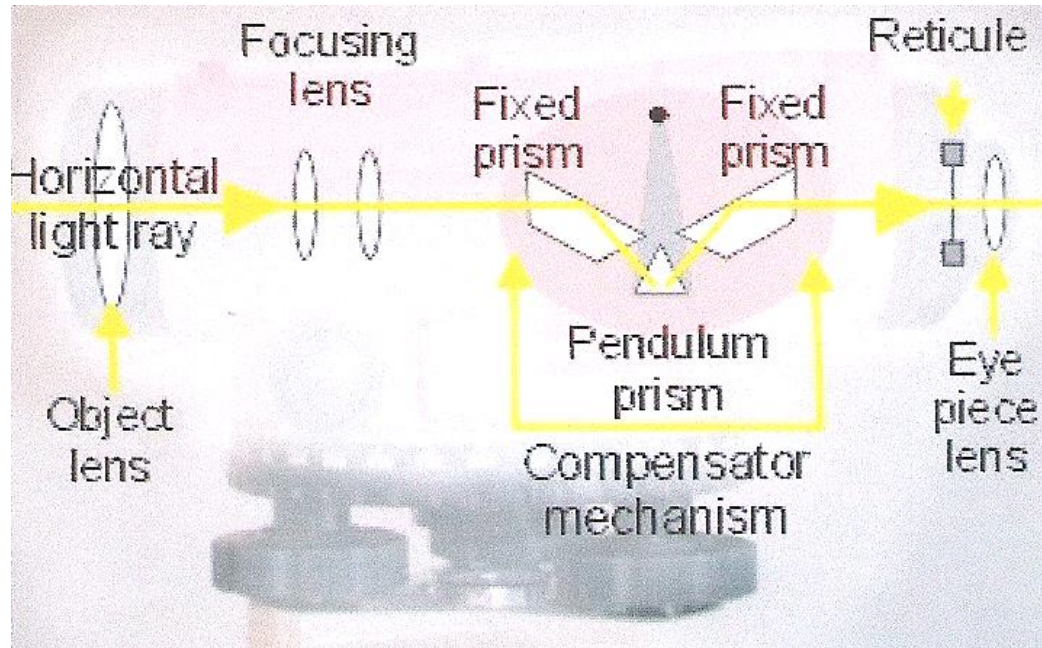
Os níveis de horizontalização automática não têm qualquer nivela associada à luneta nem parafuso de inclinação: um dispositivo óptico pesado (compensador), intercalado no campo óptico da luneta permite, pela acção do campo gravítico e após a verticalização aproximada do eixo principal, compensar qualquer inclinação do eixo óptico da luneta, dando origem à horizontalização do eixo óptico.

1. Lente
2. Objectiva
3. Compensador
4. Retículo
5. Ocular



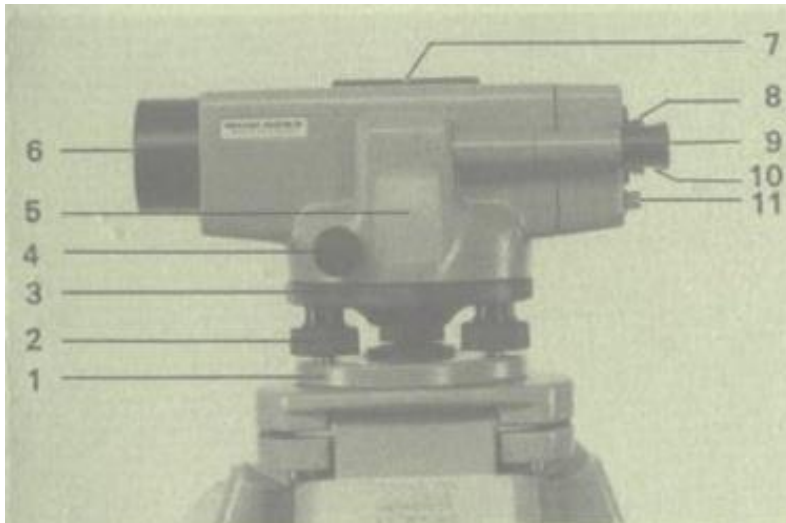
# Nivelamento geométrico ou directo

---

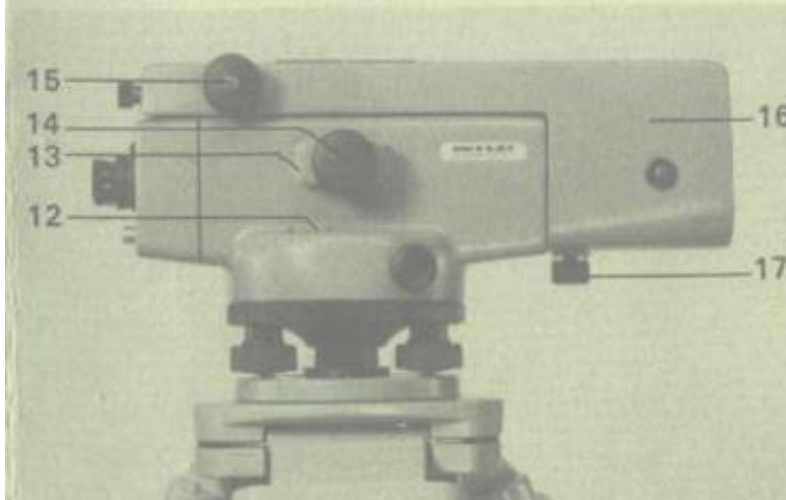


Um nível automático possui um mecanismo compensador que utiliza uma combinação de prismas fixos ou espelhos e um prisma suspenso, que pode oscilar, de forma a definir uma referência horizontal quando o sistema fica em equilíbrio. Quando correctamente colocado em estação, o compensador garante a horizontalidade da linha de pontaria com grande precisão (no caso do Leica NA20, da ordem de  $\pm 0.3''$ , induzindo um erro de leitura a 35 m igual a  $\pm 0.05$  mm).

# Nivelamento geométrico ou directo



*Fig. 1 Nivel universal automático Wild NAK2, con círculo*

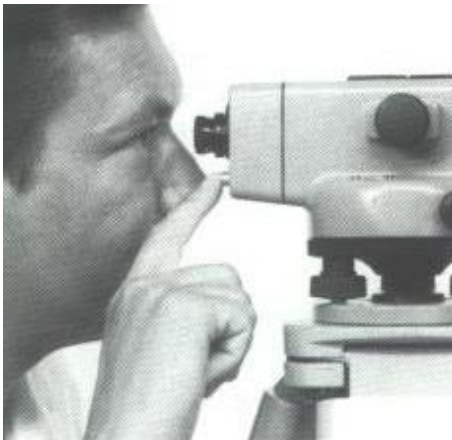
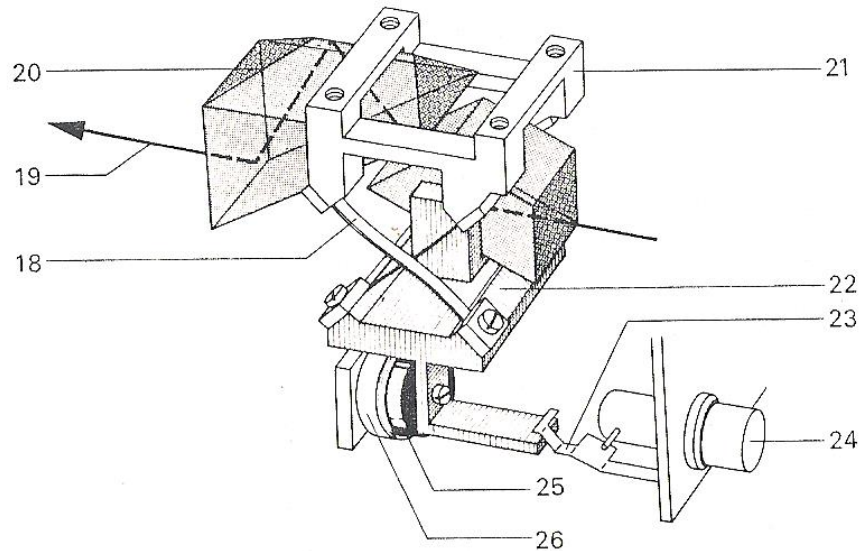
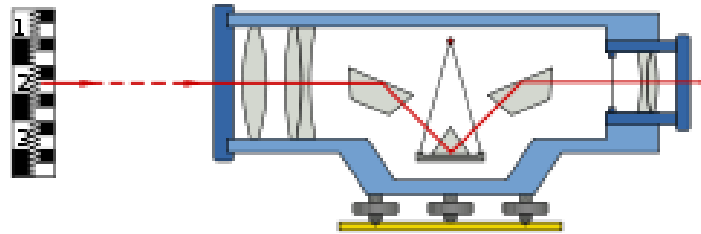


1. Base
2. Parafuso nivelante
3. Anel estriado do círculo horizontal
4. Parafuso sem fim de pequenos movimentos horizontais
5. Janela de iluminação do círculo horizontal
6. Objectiva
7. Dispositivo de pontaria
8. Focagem do retículo
9. Ocular
10. Ocular do microscópio para leituras horizontais
11. Botão do compensador
12. Nivela esférica
13. Prisma para observação da nivela esférica
14. Parafuso de focagem da imagem
15. Parafuso do micrómetro da lâmina de faces paralelas
16. Lâmina de faces paralelas
17. Parafuso de fixação da lâmina de faces paralelas

**Wild NAK2: nível automático**

# Nivelamento geométrico ou directo

- 18: eixos da suspensão
- 19: linha de pontaria
- 20: prisma superior
- 21: suporte
- 22: pendulo com prisma
- 23: mola
- 24: botão para accionar a mola
- 25: amortecedor da oscilação
- 26: tubo de amortização



É suficiente uma centragem aproximada da nivela esférica para que o compensador coloque a linha de pontaria horizontal, através da utilização do botão que acciona a mola que provoca a oscilação amortecida do prisma associado ao pendulo. Esta operação deve ser efectuada para cada visada.

# Nivelamento geométrico ou directo

**N05/NK05**

**N1/NK1**

**NA20**

**NA24**

**NA28**

**NA2/NAK2**

**NK2**

**N3**



MODELO		NA 0 NAK 0	NA 1 NAK 1	NA 2 NAK 2	N 01 NK 01	N 05 NK 05	N1 NK 1	N2 NK 2	N 3
Precisão por Km de nivelamento		± 2,5	± 1,5 ± 1	± 0,7* ± 0,3	± 10	± 5	± 2,5	± 2	± 0,2
Aumento da luneta	(x)	20	24	32, 40	19	19	23	30	11... 47**
Automático		Sim	Sim	Sim	Não	Não	Não	Não	Não
Campo a 100 m	(m)	3,6	3,2	2,4	4,0	4,0	3,6	2,8	1,8**
Constante estadimétrica		100	100	100	100	100	100	100	100**
Constante de adição	(cm)	0	0	0	0	0	0	0	0
Distância mínima de focagem	(m)	0,9	1,0	1,6	0,8	0,8	0,7	1,6	0,45
Sensibilidade do nível por 2 mm		—	—	—	60"	60"	60"	30"	10"
Precisão de calagem		± 0,8"	± 0,5"	± 0,3"	± 10"	± 10"	± 1,5"	± 0,8"	± 0,2"
Divisão do círculo		400 <sup>g</sup> ou 360°	400 <sup>g</sup> ou 360°	400 <sup>g</sup> ou 360°	400 <sup>g</sup> ou 360°	400 <sup>g</sup> ou 360°	400 <sup>g</sup> ou 360°	400 <sup>g</sup> ou 360°	
Peso do instrumento	(kg)	1,8 1,8	2,1 2,2	2,4 2,9	1,7 1,8	1,8 1,8	1,7 1,8	2,2 2,8	5,1
Peso do estojo	(kg)	1,5	1,5	1,8	1,7	1,7	1,6	1,3	3,7
Prospecto detalhado	G1-	142	143	108	153	150	154	131	158



\* Conforme mira e processo usado

\*\* Variável conforme distância de focagem.

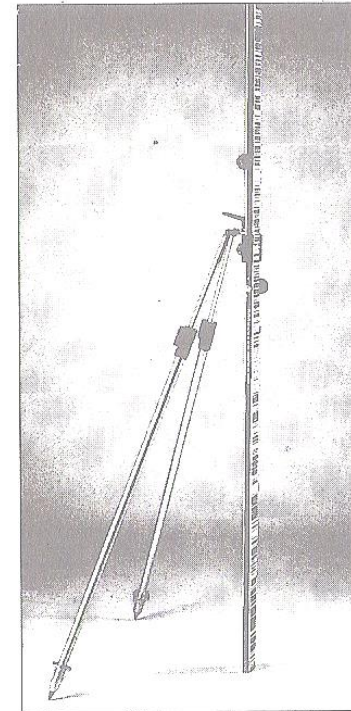
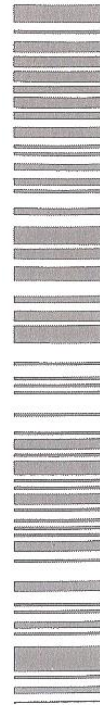
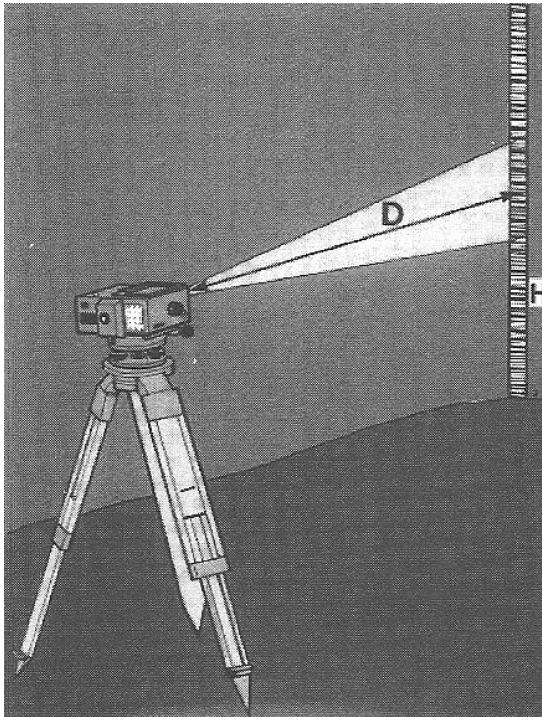
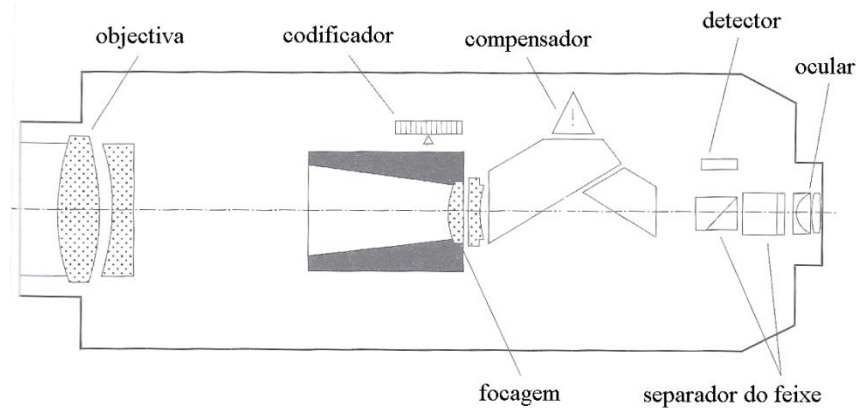
# Nivelamento geométrico ou directo

---

O nível digital Zeiss Dini tem os mesmos componentes ópticos e mecânicos que um nível automático. No entanto, para efeitos de leitura electrónica da mira graduada através de código de barras, incorpora um separador da luz reflectida na mira e que incide na luneta, transferindo a imagem para uma matriz de díodos detectores. A abertura angular do aparelho é igual a  $2^\circ$ , o que a 1.8 m de distância permite visualizar 70 mm da mira e a 100 m de distância permite visualizar 3.5 m da mira; a distância aparelho-mira é assim determinada em função da porção da mira que se pode visualizar a partir do ponto estação. A leitura na mira é obtida através de um processo de correlação da imagem da mira com imagens de códigos de barras.

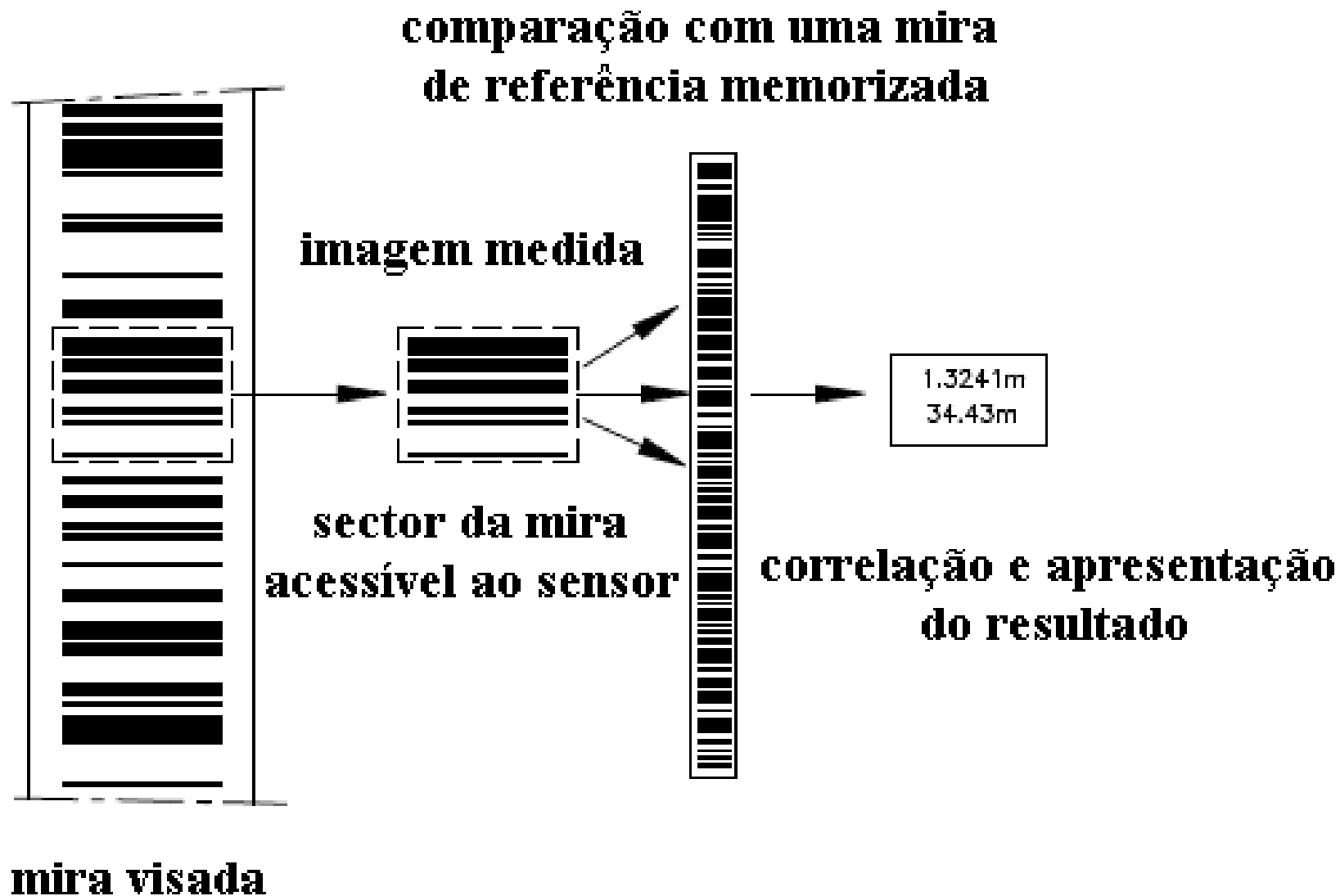


# Nivelamento geométrico ou directo



# Nivelamento geométrico ou directo

---





# Nivelamento geométrico ou directo

---

## Zeiss Dini 22: teclado

Ligar/desligar o aparelho: **ON/OFF**

Efectuar medição (leitura da mira – R, distância horizontal – HD): **MEAS**

Medir distância: **DIST**

Acesso ao menu: **MENU**

Informação do aparelho (bateria): **INFO**

Alterar o display: **DISP**

Introduzir número do ponto: **PNr**

Introduzir código do ponto + informação adicional: **REM**

Editar os dados da memória: **EDIT**

Efectuar medições múltiplas: **RPT**

Comutar entre leituras directa e inversa: **INV**

Introduzir manualmente leitura: **INP**

# Nivelamento geométrico ou directo

---

## Zeiss Dini 22: Menu (7)

- 1) **Input:** Max. dist.=100, Min. sight=0.2, Max. diff.=0.01, Refr. coeff.=0.130, Vt. offset=0.0
- 2) **Adjustment:** Método: Forstner, Nabauer, Kukkamaki, Japanese, Curv.: on/off, Refr: on/off
- 3) **Data Transfer:** Interface1, Interface2, PC-demo, Update/service
- 4) Set Rec. Param.
- 5) Set Instr. Param.

# Nivelamento geométrico ou directo

Observação de um ponto único (nivelamento simples):

- 1) Iniciar: **IntM**
- 2) Introduzir valor da alt da marca de referência;
- 3) Efectuar leitura atrás
- 4) Efectuar leitura à frente
- 5) Medir para mais pontos, ou **ESC** para sair,

Transferência de dados:

- 1) Executar o programa **RECPCE**
- 2) Data transfer: **Interface2**,
- 3) **Set parameters:** Protocol: **Rec 500**; Baud rate: **19200**; Parity: **Even**; Stop bits: **2**;
- 4) Ler dados a partir do Rec (definir ficheiro); executar transferência a partir do aparelho.

# Nivelamento geométrico ou directo

---

Observação de uma linha de nivelamento (nivelamento composto):

1) Para se efectuar o registo interno das observações, Record=Mem:

Menu

Set Rec Param. (4)

Recording of Data (1)

Record + Mod: alterna de Off → **Mem** → V.24

2) Activar memória em Menu (5), Ajust. Interface

3) Iniciar uma linha (**LINE**)

4) Introduzir o nome da linha

5) Definir a sequência de leitura (**BF**- atrás/frente)

6) Introduzir a alt da marca inicial

7) Iniciar observações na sequência atrás/frente (back/fore)

8) Finalizar a linha de nivelamento (**LEnd**)

9) Introduzir a alt da marca final

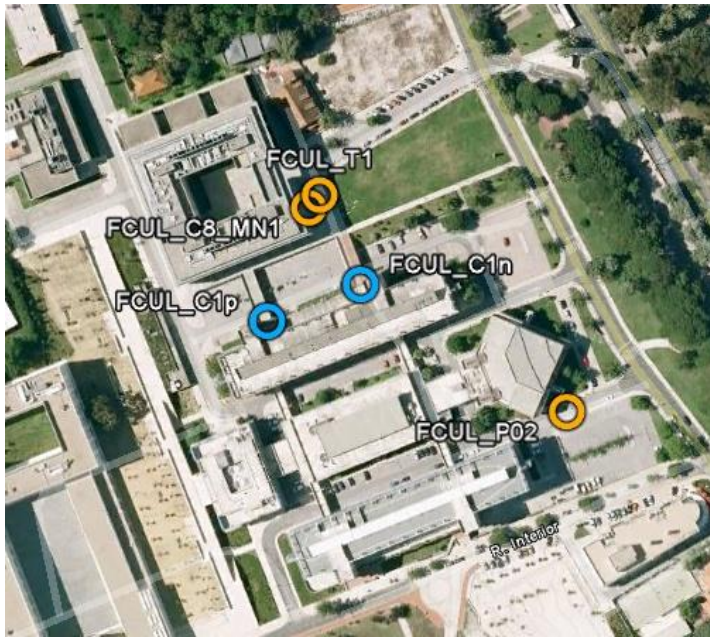
10) Finalizar (**ESC**)

# Nivelamento geométrico ou directo

## Technical Data

Technical Data	DiNi® 12	DiNi® 22
<b>Accuracy as per DIN 18723</b>		
Standard deviation on 1 km of double levelling		
Electronic measurement:		
- invar precision bar code staff	0.3 mm	0.7 mm
- foldable bar code staff	1.0 mm	1.3 mm
Visual measurement		
- foldable staff, metric scale	1.5 mm	2.0 mm
<b>Measuring range</b>		
Electronic measurement		
- invar precision bar code staff	1.5 - 100 m	1.5 - 100 m
- foldable bar code staff	1.5 - 100 m	1.5 - 100 m
Visual measurement		
- foldable staff, metric scale	from 1.3 m	from 1.3 m
<b>Accuracy of distance measurement</b>		
Electronic measurement with a 20 m sighting distance		
- invar precision bar code staff	20 mm	25 mm
- foldable bar code staff	25 mm	30 mm
Visual measurement:		
- foldable staff, metric scale	0.2 m	0.3 m
<b>Least display unit</b>		
Height measurement		
	0.01 mm/0.0001 ft/ 0.0001 in	0.1 mm/0.001 ft/ 0.001 in
Distance measurement		
	1 mm	10 mm
<b>Measuring time</b>		
Electronic measurement	3 s	2 s
<b>Telescope</b>		
Magnification	32 x	26 x
Aperture	40 mm	40 mm
Field of view at 100 m	2.2 m	2.2 m
Electronic measurement field at 100 m	0.3 m	0.3 m
<b>Compensator</b>		
Inclination range	± 15'	± 15'
Setting accuracy	± 0.2"	± 0.5"
<b>Levelling</b>		
Circular level	8/2 mm	8/2 mm

# Nivelamento geométrico ou directo



Ponto	alt	Descrição
FCUL_T1	80.108 m	Marca cravada no lado NW do degrau superior da escada em frente do Edifício C8 que dá para o parque de estacionamento
FCUL_P02	76.947 m	Marca metálica sobre lancil, a 5m SW do início da curva de saída do lancil, lado da estrada.
C1-nascente (C1n)	80.567 m	Marca na entrada (nascente) do edifício C1, a partir do viaduto de ligação ao C8
FCUL_MN1	80.765 m	Marca no degrau superior da soleira da porta SE de emergência, junto ao bar
C1-poente (C1p)	80.562 m	Marca na entrada (poente) do edifício C1, a partir do viaduto de ligação ao C8.
M3	75.230 m	Marca do IGP, linha Monção-Cascais. Cimentada no 1º degrau à esquerda na porta principal da Igreja do Campo Grande

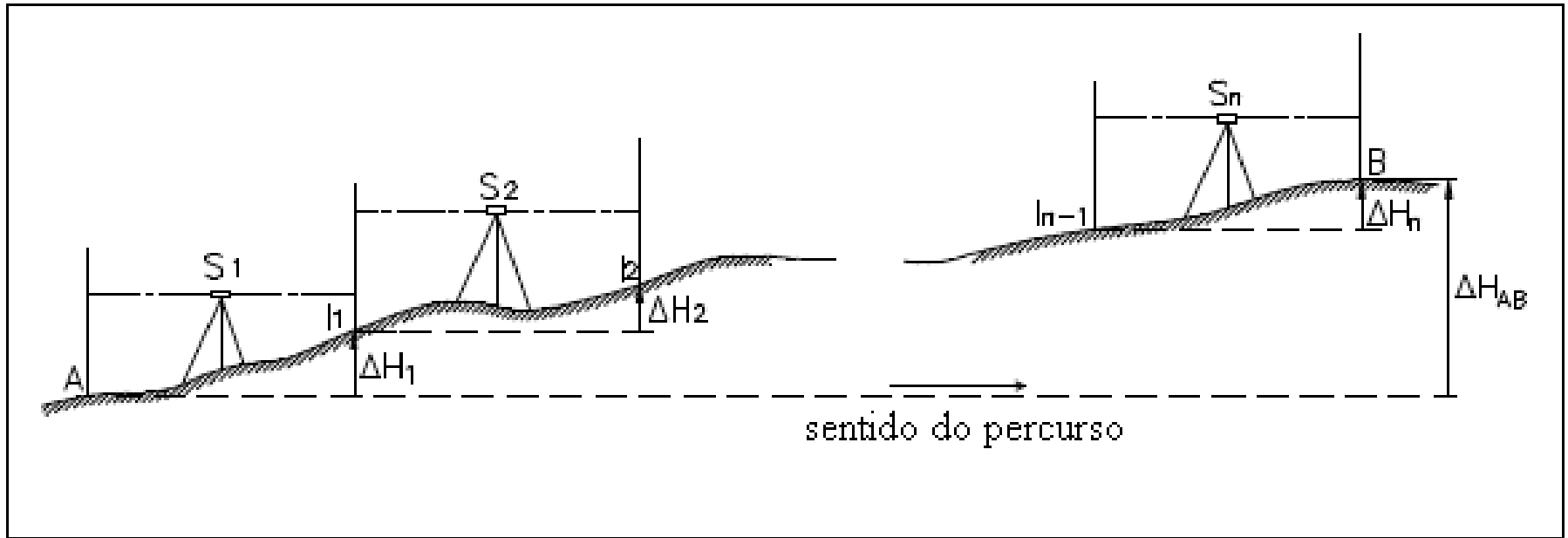
## Marcas de nivelamento na FCUL

# Nivelamento geométrico ou directo

---

Uma linha de nivelamento deve, por princípio, ser **fechada**, isto é, as altitudes dos pontos inicial e final devem ser conhecidas. Pode também utilizar-se um nivelamento fechado sobre si mesmo, que corresponde ao caso em que o ponto final do nivelamento coincide com o ponto inicial, e nesse caso a diferença de nível entre o ponto final e inicial deve ser nula.

# Nivelamento geométrico ou directo



A mira é colocada no ponto origem A e o aparelho é colocado em  $S_1$ , a uma dada distância de A, contada em número de passos de tal forma a não ser ultrapassada a distância máxima de acordo com a precisão do nivelamento. O operador efectua então a leitura à rectaguarda  $L_R^A$  para a mira em A, registando os valores dos fios nivelador e estadimétricos.



# Nivelamento geométrico ou directo

O porta-miras desloca-se então para o ponto auxiliar I1, verificando a respectiva estabilidade (caso seja necessário, pode utilizar uma sapata), situado à mesma distância que tinha medido anteriormente entre o nível e o ponto A. O operador efectua a leitura à frente  $L_F^{I1}$  para a mira em I1, registando os valores dos fios nivelador e estadimétricos, calculando então o desnível  $\Delta H_1 = L_R^A - L_F^{I1}$ , assim como confirmando se a diferença entre as distâncias atrás e à frente está dentro da tolerância. O operador desloca-se então para S<sub>2</sub> e o processo repete-se até a mira ser colocada sobre o ponto B.

# Nivelamento geométrico ou directo

Os desniveis parciais são:

$$\Delta H_1 = L_R^A - L_F^{I1}, \text{ de A para I1}$$

$$\Delta H_2 = L_R^{I1} - L_F^{I2}, \text{ de I1 para I2}$$

..., ...

$$\Delta H_i = L_R^{I(i-1)} - L_F^{Ii}, \text{ de I(i-1) para Ii}$$

..., ...

$$\Delta H_n = L_R^{I(n-1)} - L_F^B, \text{ de I(n-1) para B}$$

devendo verificar-se

$$\sum_{i=1}^n L_R - \sum_{i=1}^n L_F = \sum_{i=1}^n \Delta H_i = \Delta H_{AB}$$

Sendo  $H_A$  e  $H_B$  as altitudes conhecidas dos pontos extremos da linha de nivelamento, o **erro de fecho**  $\varepsilon_H$  é dado por

$$\varepsilon_H = H_A + \sum_{i=1}^n \Delta H_i - H_B$$

# Nivelamento geométrico ou directo

---

Verificando-se que o erro de fecho  $\varepsilon_H$  é inferior à tolerância  $T_H$ , efectua-se a **compensação** da linha de nivelamento, que é a operação que consiste em repartir o erro de fecho por todos os desníveis, de forma a que o erro de fecho se anule. Esta distribuição pode ser efectuada de diversas formas:

1. Proporcionalmente ao número  $n$  de desníveis, utilizada nos casos em que o erro de fecho é muito pequeno, inferior ao desvio padrão  $\sigma_H = T_H/2.7$ , tendo-se que a compensação a aplicar a cada desnível é  **$C_{hi} = -\varepsilon_H/n$** .
2. Proporcionalmente à **distância  $L_i$** , de tal forma que quanto maior for a distância, mais o desnível está sujeito a erro, tendo-se que a compensação a aplicar a cada desnível é  **$C_{hi} = -\varepsilon_H L_i/\Sigma L_i$** .
3. Proporcionalmente ao valor absoluto do desnível, tendo-se que a compensação a aplicar a cada desnível é  **$C_{hi} = -\varepsilon_H |\Delta_{Hi}|/\Sigma |\Delta_{Hi}|$** .

# Nivelamento geométrico ou directo

data:

cota de partida: 124,968 m

aparelho: NA 0

cota de chegada: 128,924 m

operador:

n°	ponto visado	leituras à rectaguarda			leituras à frente			distância Dh m	desnível ΔH (mm)		Comp.* mm	Altitude m	
		S' mm	Niv mm	S mm	S' mm	Niv mm	S mm		+	-			
1	R1	1 973	1 925	1 878								124,968	
2	I1	1 536	1 524	1 508	1 343	1 296	1 249	18,9	629		-2		125,595
3	I2	1 866	1 836	1 806	1 388	1 377	1 365	5,1	147		-1		125,741
4	I3	1 016	0 988	0 955	1 076	1 047	1 017	11,9	789		-1		126,529
5	S4	1 696	1 661	1 626	1 667	1 638	1 608	12,0		-650		-1	125,878
6	I4	1 709	1 678	1 647	1 072	1 046	1 022	12,0	615			-1	126,491
7	I5	1 634	1 604	1 572	1 258	1 226	1 195	12,5	452			-1	126,942
8	I6	1 363	1 333	1 304	1 306	1 274	1 243	12,5	330			-1	127,271
9	I7	1 314	1 155	0 995	0 896	0 803	0 713	24,2	530			-3	127,798
10	R3				0 039	0 025	0 012	34,6	1 130			-4	128,924
9 desníveis								143,7	4 622	-650		-16	

erro de fecho =  $\varepsilon_H = 16 \text{ mm}$  ;

tolerância =  $T_H = 18 \text{ mm}$ .

# Nivelamento geométrico ou directo

---

## Tolerâncias:

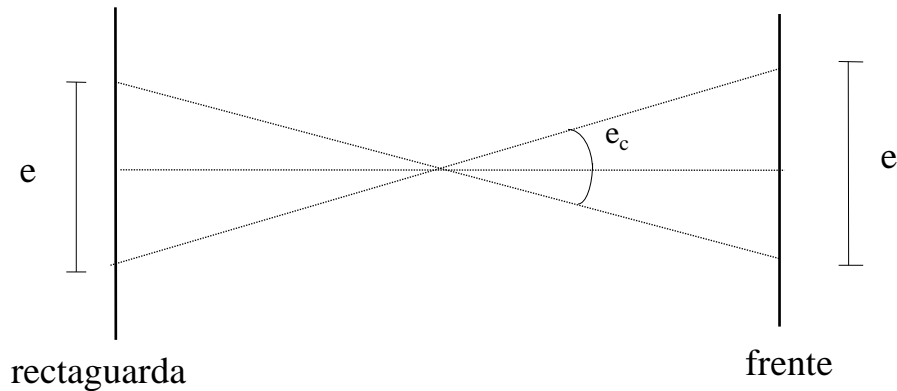
Sendo  $L$  o comprimento total do percurso em km e  $N$  o número de desníveis observados,  $n=N/L$  representa o número de desníveis por km. O valor  $n=16$  corresponde a um nivelamento composto cuja distância média entre miras é igual a 62.50 m ( $\approx 30$  m para a distância nível-mira):

Tolerância em mm	$n \leq 16$	$n \geq 16$
Baixa precisão	$4\sqrt{36L + L^2}$	$\sqrt{36N + N^2 / 16}$
Média precisão	$4\sqrt{9L + L^2}$	$\sqrt{9N + N^2 / 16}$
Alta precisão	$8\sqrt{L}$	$2\sqrt{N}$

# Nivelamento geométrico ou directo

---

Considerem-se apenas os erros de leitura ( $e_l$ ) e calagem ( $e_c$ )



**Para o erro de calagem**

$$e_{\text{ret}} = e_c \frac{D}{2}$$

$$e_{\text{frt}} = e_c \frac{D}{2}$$

**e, analogamente, para o erro de leitura**

$$e_{\text{ret}} = e_l \frac{D}{2}$$

$$e_{\text{frt}} = e_l \frac{D}{2}$$

# Nivelamento geométrico ou directo

---

Supondo que os erros são independentes para as duas pontarias, tem-se em termos de variância do desnível:

$$\sigma_{\Delta}^2 = \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_c^2)}{2} D^2 \Leftrightarrow \sigma_{\Delta}^2 = KD^2$$

onde

$$K = \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_c^2)}{2} \text{ - constante do aparelho}$$

# Nivelamento geométrico ou directo

---

- Para linhas fechadas:

$$\varepsilon_H = \sum_j \Delta H'_j$$

Por aplicação da *Lei Geral de Propagação das Variâncias e Covariâncias*, vem como **variância do erro de fecho**

$$\sigma_{\varepsilon_H}^2 = \sum_j \sigma_{\Delta H_j}^2 = k \sum_j D_j^2$$

A amplitude do intervalo de confiança (a 99%) determina a **tolerância do erro de fecho**

$$|\varepsilon_H| \leq 2.6\sqrt{K} \sqrt{\sum_j D_j^2}$$



# Nivelamento geométrico ou directo

---

- Para linhas abertas:

$$\varepsilon_H = H_i + \sum_j \Delta H_j' - H_f$$

**variância do erro de fecho**

$$\sigma_{\varepsilon_H}^2 = \sum_j \sigma_{\Delta H_j}^2 + \sigma_{H_i}^2 + \sigma_{H_f}^2 = k \sum_j D_j^2 + 2\sigma_{H_i H_f}^2$$

**tolerância do erro de fecho**

$$|\varepsilon_H| \leq 2.6 \sqrt{K \sum_j D_j^2 + 2\sigma_{H_i H_f}^2}$$

# Nivelamento geométrico ou directo

---

Para os aparelhos disponíveis na fcul, os valores da constante do aparelho são:

- alta precisão (**N3**) -----  $\sqrt{K} = 0''.5/206265''$
- média-alta precisão (**NA2 c/ micro.**) -----  $\sqrt{K} = 1''/206265''$
- média precisão (**NA2 s/ micro., Zeiss Dini 22**) --  $\sqrt{K} = 4.5''/206265''$

## Outro critério de Tolerância (norma utilizada)

- alta precisão  $\varepsilon_H (\text{mm}) \leq 4\sqrt{L(\text{Km})}$
- média precisão  $\varepsilon_H (\text{mm}) \leq 8.3\sqrt{L(\text{Km})}$  com  $L = \sum D_j$

# Nivelamento geométrico ou directo

---

Distribuição do erro de fecho pelos desníveis observados

$$\varepsilon_H = H_i + \sum_j \Delta H'_j - H_f \quad \text{e} \quad H_f = H_i + \sum_j \Delta H_j$$

$$\text{logo} \quad \varepsilon_H = \sum_j \Delta H'_j - \sum_j \Delta H_j = \sum_j (\Delta H'_j - \Delta H_j)$$

$$\text{Com} \quad \varepsilon_H = -\sum_j \varepsilon_j \quad \text{vem} \quad \varepsilon_j = \Delta H_j - \Delta H'_j$$

**Desnível corrigido** (“verdadeiro”):

$$\Delta H_j = \Delta H'_j + \varepsilon_j$$

# Nivelamento geométrico ou directo

---

Valor de **desnível compensado** para o lanço **j**

$$\Delta H_j = \Delta H'_j - \frac{D_j^2}{\sum_{k=1}^n D_k^2} \varepsilon_H$$

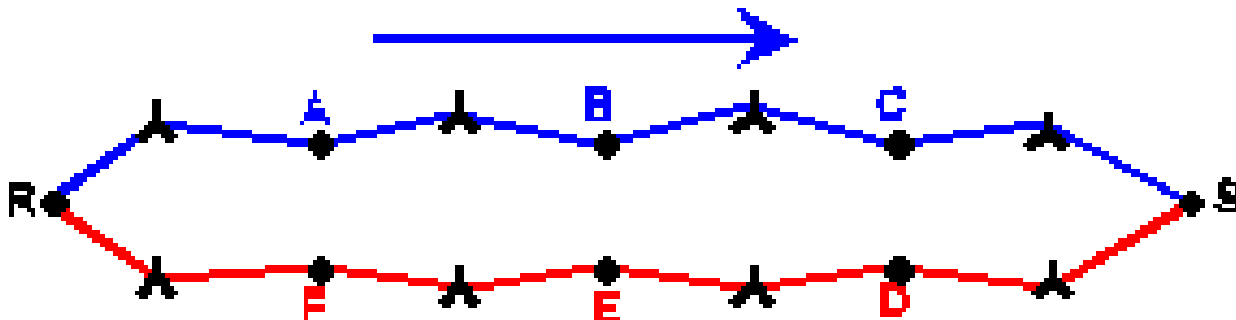
Valor de **altitude compensada** para o ponto **j**

$$H_j = H_i + \sum_{k=1}^j \Delta H'_k - \frac{\sum_{k=1}^j D_k^2}{\sum_{k=1}^n D_k^2} \varepsilon_H$$

# Nivelamento geométrico ou directo

---

No caso de uma linha de nivelamento não ser fechada, deve efectuar-se um percurso de nivelamento num sentido e um percurso de contranivelamento no sentido contrário, como controlo, sendo o valor do desnível entre os pontos extremos independente do percurso efectuado: **R-A-B-C-S** e **S-D-E-F-R**. Se os 2 percursos forem efectuados em alturas diferentes, a(s) mira(s) será estacionada **10 vezes** e o nível **8 vezes**).

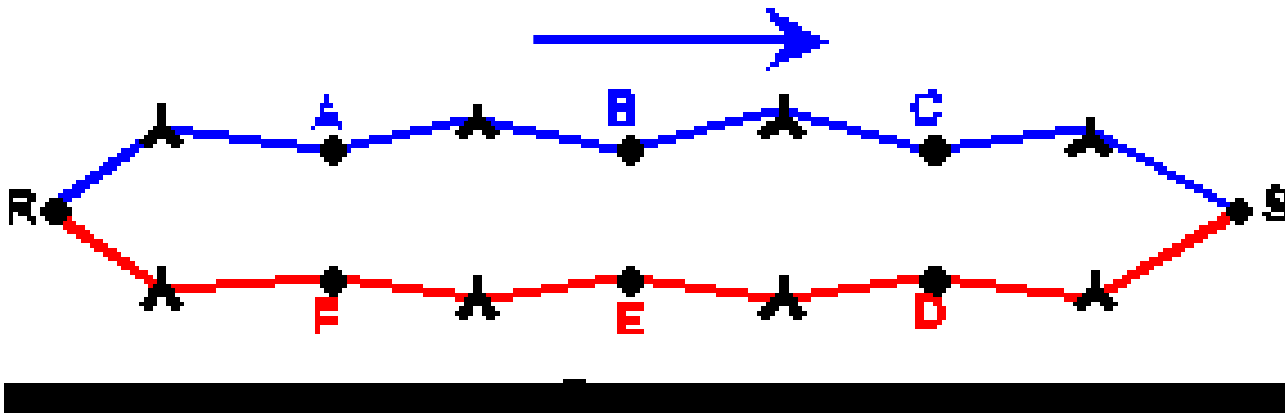


Os valores de  $dN_{RS}$  no nivelamento e no contranivelamento devem coincidir; se tal não acontecer e a diferença for aceitável, a média dos dois valores obtidos será um valor mais preciso.

# Nivelamento geométrico ou directo

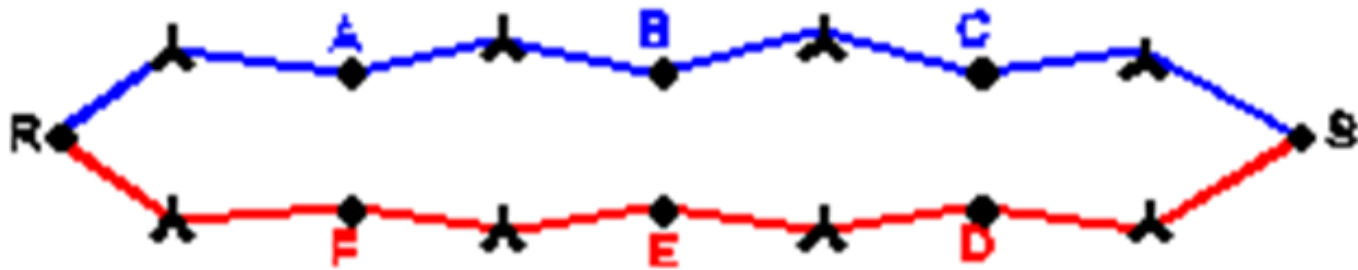
---

Como alternativa a efectuar os dois percursos em sentidos contrários, é possível efectuar os dois percursos no mesmo sentido: **R-A-B-C-S** e **R-F-E-D-S**. Se os 2 percursos forem efectuados em alturas diferentes, a(s) mira(s) será estacionada **10 vezes** e o nível **8 vezes**).



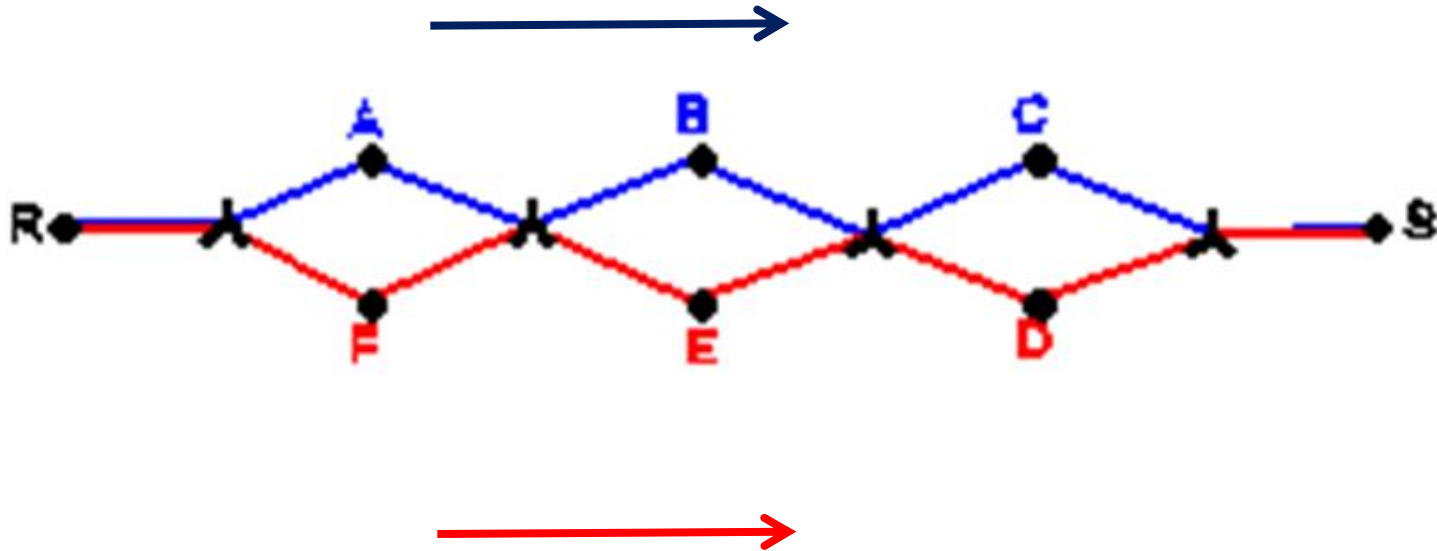
# Nivelamento geométrico ou directo

Para ganhar tempo, estes percursos podem aproximar-se, podendo no limite confundir-se as estações: **R-A-B-C-S** e **R-F-E-D-S**.



# Nivelamento geométrico ou directo

---



Este procedimento tem o nome de **nivelamento duplo**, efectuando-se **4** estacionamentos do nível e **8** estacionamentos das miras. Obtêm-se deste modo duas medidas para  $dN_{RS}$ , *uma através do nivelamento considerando os pontos A, B e C* e outra através do nivelamento considerando os pontos F, E e D.



# Nivelamento geométrico ou directo

A diferença entre os valores absolutos de desníveis de duas linhas de nivelamento independentes obtidas num nivelamento duplo que liga os pontos A e B distanciados **1 km** define o “**desvio padrão para 1 km de nivelamento duplo**” ( $s_{1\text{km nivelamento duplo}}$ ), parâmetro usualmente utilizado para caracterizar a precisão de um nível.

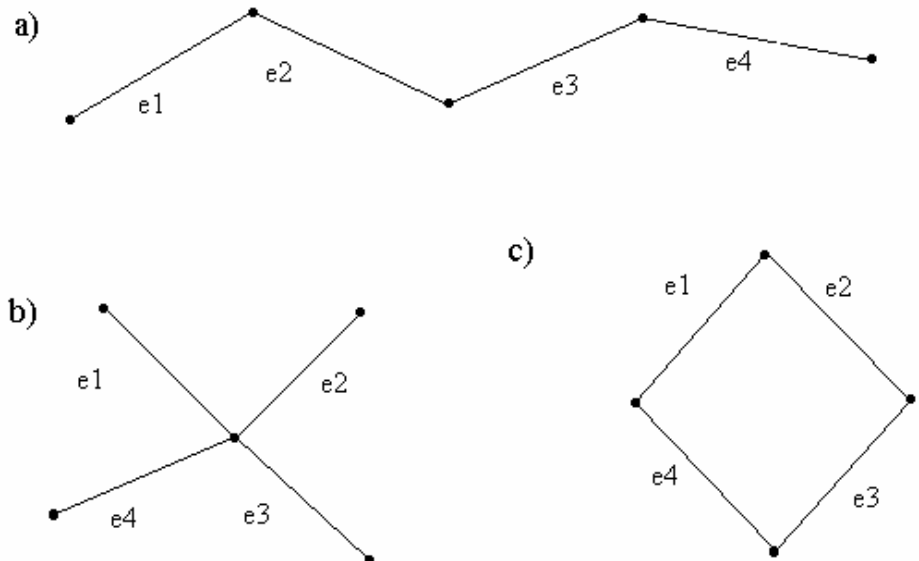
MODELO	NA 0 NAK 0	NA 1 NAK 1	NA 2 NAK 2	N 01 NK 01	N 05 NK 05	N1 NK 1	N2 NK 2	N 3
Precisão por Km de nivelamento	± 2,5	± 1,5 ± 1	± 0,7* ± 0,3	± 10	± 5	± 2,5	± 2	± 0,2
Aumento da luneta (x)	20	24	32, 40	19	19	23	30	11... 47**
Automático	Sim	Sim	Sim	Não	Não	Não	Não	Não
Campo a 100 m (m)	3,6	3,2	2,4	4,0	4,0	3,6	2,8	1,8**
Constante estadimétrica	100	100	100	100	100	100	100	100**
Constante de adição (cm)	0	0	0	0	0	0	0	0
Distância mínima de focagem (m)	0,9	1,0	1,6	0,8	0,8	0,7	1,6	0,45
Sensibilidade do nível por 2 mm	—	—	—	60"	60"	60"	30"	10"
Precisão de calagem	± 0,8"	± 0,5"	± 0,3"	± 10"	± 10"	± 1,5"	± 0,8"	± 0,2"
Divisão do círculo	400 <sup>g</sup> ou 360°	400 <sup>g</sup> ou 360°	400 <sup>g</sup> ou 360°	400 <sup>g</sup> ou 360°	400 <sup>g</sup> ou 360°	400 <sup>g</sup> ou 360°	400 <sup>g</sup> ou 360°	
Peso do instrumento (kg)	1,8 1,8	2,1 2,2	2,4 2,9	1,7 1,8	1,8 1,8	1,7 1,8	2,2 2,8	5,1
Peso do estojo (kg)	1,5	1,5	1,8	1,7	1,7	1,6	1,3	3,7
Prospecto detalhado G1-	142	143	108	153	150	154	131	158

\* Conforme mira e processo usado    \*\* Variável conforme distância de focagem.

# Nivelamento geométrico ou directo

De acordo com a **DIN (1990)**, para que se possa determinar o desvio padrão  $s$  de um nivelamento duplo de 1 km, são utilizados 4 segmentos  $e_j$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ) ligados entre si, cada um com 0.25 km de comprimento aproximadamente, num campo de prova conforme indicado na figura.

Ainda segundo a norma, para se determinar o desvio padrão  $s$ , devem ser realizados 5 nivelamentos duplos em cada segmento  $e_j$  no campo de prova. Os nivelamentos não devem ser realizados sob condições atmosféricas extremas.



# Nivelamento geométrico ou directo

---

A partir das 10 observações  $l_{ij}$  do desnível para cada segmento, é possível calcular o valor médio  $\bar{l}$  e os desvios  $v_{ij}$  da seguinte forma:

$$\bar{l} = \frac{\sum_{i=1}^{10} l_{ij}}{10}, j = 1, 2, 3, 4 \qquad v_{ij} = \bar{l}_j - l_{ij}$$

onde  $\bar{l}_j$  é o desnível médio para cada segmento. De acordo com a norma DIN (1990), o desvio padrão para o nivelamento duplo de 1 km é dado por:

$$s = \sqrt{\frac{4 \sum_{j=1}^4 v_{ij}^2}{18}}$$

O intervalo de confiança para  $\sigma$  é  $0 \leq \sigma \leq 1.24 s$  para um nível de confiança  $1 - \alpha = 0.95$ .

# **Nivelamento geométrico ou directo**

---

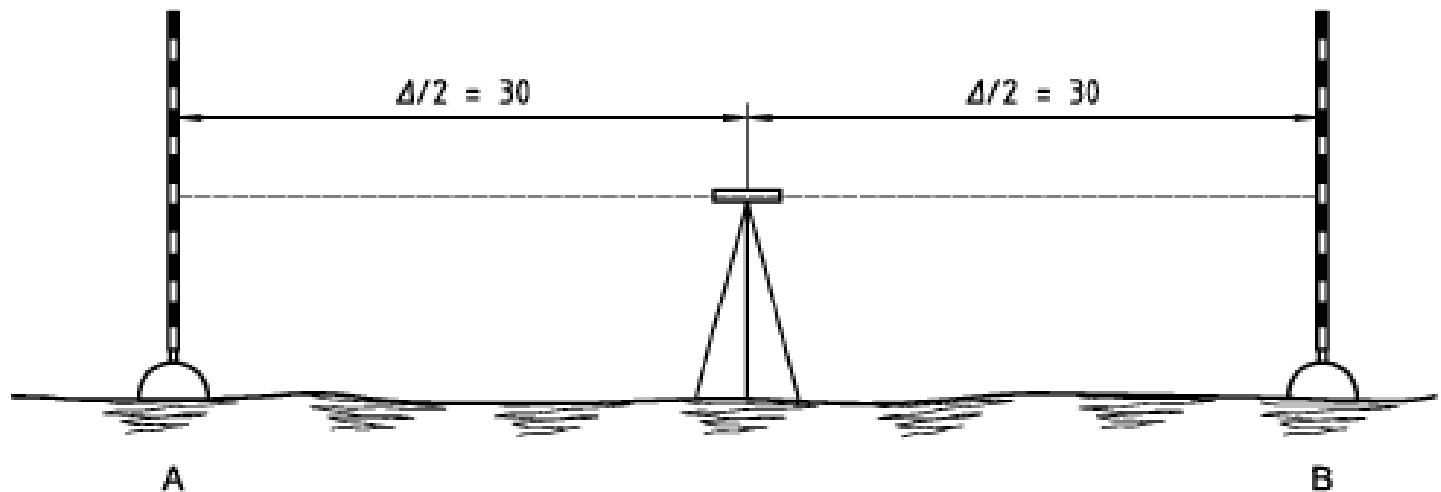
A norma **ISO 17123-2** especifica os procedimentos que devem ser adoptados na determinação da precisão de um nível qualquer. Os resultados destes testes são influenciados pelas condições meteorológicas, em especial o gradiente da temperatura (um céu coberto e vento fraco constituem as condições mais favoráveis).

O teste simplificado pretende verificar se a precisão de um dado nível está dentro do limite permitido. O teste completo deve adoptar-se quando se pretende determinar o valor da precisão que é possível obter com um dado nível.

# Nivelamento geométrico ou directo

---

**Teste simplificado:** de forma a manter a influência da refração tão pequena quanto possível, deve seleccionar-se uma zona horizontal, colocando duas miras separadas por uma distância de 60 m, aproximadamente (em solo estável ou sobre sapatas), nos pontos A e B. O nível deve ser colocado a meia distância das miras. Antes de iniciar o teste, o aparelho deve adaptar-se à temperatura ambiente (esperar dois minutos por cada °C de diferença de temperatura).



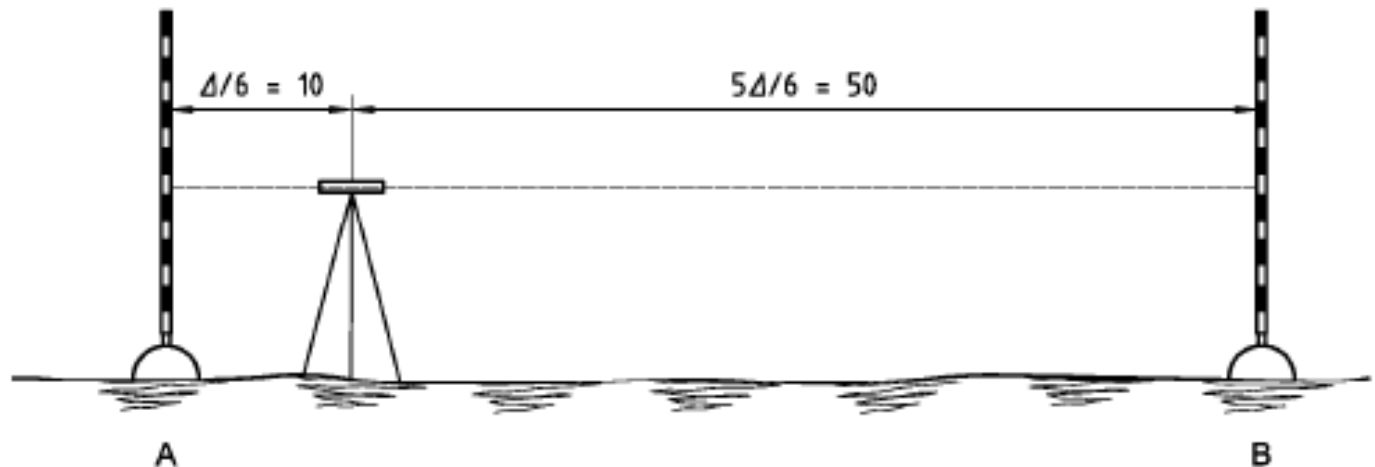
# Nivelamento geométrico ou directo

O primeiro conjunto de medições é constituído por 10 pares de leituras nas miras em A e B, respectivamente  $x_{A,j}$  e  $x_{B,j}$ ,  $j=1,\dots,10$ ; entre cada par de leituras o aparelho deve ser ligeiramente mudado de posição e após a realização de 5 pares de leituras ( $x_{A,1}$ ,  $x_{B,1}$ ,  $x_{A,2}$ ,  $x_{B,2}$ ,  $x_{A,3}$ ,  $x_{B,3}$ ,  $x_{A,4}$ ,  $x_{B,4}$ ,  $x_{A,5}$ ,  $x_{B,5}$ ), as miras devem trocar de posição, realizando-se os restantes 5 pares de leituras ( $x_{A,6}$ ,  $x_{B,6}$ ,  $x_{A,7}$ ,  $x_{B,7}$ ,  $x_{A,8}$ ,  $x_{B,8}$ ,  $x_{A,9}$ ,  $x_{B,9}$ ,  $x_{A,10}$ ,  $x_{B,10}$ ).

# Nivelamento geométrico ou directo

---

O segundo conjunto de medições é efectuado com o nível situado a cerca de 10 m do ponto A e é constituído por 10 pares de leituras nas miras em A e B, respectivamente:  $(x_{A,11}, x_{B,11}, x_{A,12}, x_{B,12}, x_{A,13}, x_{B,13}, x_{A,14}, x_{B,14}, x_{A,15}, x_{B,15})$  e  $(x_{A,16}, x_{B,16}, x_{A,17}, x_{B,17}, x_{A,18}, x_{B,18}, x_{A,19}, x_{B,19}, x_{A,20}, x_{B,20})$ . De forma idêntica à série anterior, entre cada par de leituras o aparelho deve ser ligeiramente mudado de posição e após a realização de 5 pares de leituras as miras devem trocar de posição.



# Nivelamento geométrico ou directo

**Cálculo:**  $d_j = x_{A,j} - x_{B,j} \quad j = 1, \dots, 20$

$$\bar{d}_1 = \frac{\sum_{j=1}^{10} d_j}{10}$$

$$r_j = \bar{d}_1 - d_j \quad j = 1, \dots, 10$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{10} r_j^2}{v}}$$

$$v = 10 - 1 = 9$$

$$\bar{d}_2 = \frac{\sum_{j=11}^{20} d_j}{10}$$

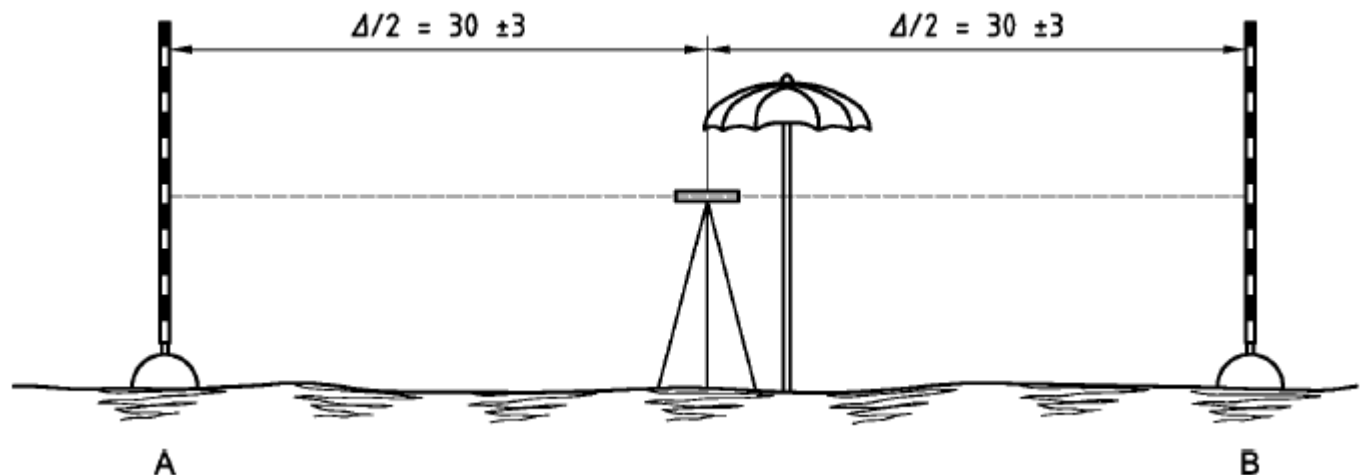
A diferença  $\bar{d}_1 - \bar{d}_2$  deve ser majorada por  $\pm p$ , de acordo com a norma ISO 4463-1; se o valor de  $p$  não estiver disponível,  $|\bar{d}_1 - \bar{d}_2|$  deve ser inferior a 2.5 s. Se a diferença  $|\bar{d}_1 - \bar{d}_2|$  for demasiado grande, significa que há uma incerteza excessiva nas leituras correspondentes à distância 50 m, resultante de erros de leitura, refração e erro de colimação. Nesse caso, verificar o erro de colimação.



# Nivelamento geométrico ou directo

---

**Teste completo:** de forma a manter a influência da refacção tão pequena quanto possível, deve seleccionar-se uma zona horizontal, colocando duas miras separadas por uma distância de 60 m, aproximadamente (em solo estável ou sobre sapatas), nos pontos A e B. O nível deve ser colocado a meia distância das miras ( $30 \text{ m} \pm 3 \text{ m}$ ). Antes de iniciar o teste, o aparelho deve adaptar-se à temperatura ambiente (esperar dois minutos por cada  $^{\circ}\text{C}$  de diferença de temperatura).



# Nivelamento geométrico ou directo

---

O primeiro conjunto de medições é constituído por 20 pares de leituras nas miras em A e B, respectivamente  $x_{A,j}$  e  $x_{B,j}$ ,  $j=1,\dots,20$ ; entre cada par de leituras o aparelho deve ser ligeiramente mudado de posição e após a realização dos 10 pares de leituras ( $x_{A,1}$ ,  $x_{B,1}$ ,  $x_{A,2}$ ,  $x_{B,2}$ ,  $x_{A,3}$ ,  $x_{B,3}$ ,  $x_{A,4}$ ,  $x_{B,4}$ ,  $x_{A,5}$ ,  $x_{B,5}$ ,  $x_{A,6}$ ,  $x_{B,6}$ ,  $x_{A,7}$ ,  $x_{B,7}$ ,  $x_{A,8}$ ,  $x_{B,8}$ ,  $x_{A,9}$ ,  $x_{B,9}$ ,  $x_{A,10}$ ,  $x_{B,10}$ ) a ordem de leitura inverte-se, realizando-se os 10 pares de leituras restantes ( $x_{B,11}$ ,  $x_{A,11}$ ,  $x_{B,12}$ ,  $x_{A,12}$ ,  $x_{B,13}$ ,  $x_{A,13}$ ,  $x_{B,14}$ ,  $x_{A,14}$ ,  $x_{B,15}$ ,  $x_{A,15}$ ,  $x_{B,16}$ ,  $x_{A,16}$ ,  $x_{B,17}$ ,  $x_{A,17}$ ,  $x_{B,18}$ ,  $x_{A,18}$ ,  $x_{B,19}$ ,  $x_{A,19}$ ,  $x_{B,20}$ ,  $x_{A,20}$ ).

# Nivelamento geométrico ou directo

---

No segundo conjunto de medições, as miras são mudadas de posição e o procedimento anterior é repetido, obtendo-se os pares de observações:  $(x_{A,21}, x_{B,21}, x_{A,22}, x_{B,22}, x_{A,23}, x_{B,23}, x_{A,24}, x_{B,24}, x_{A,25}, x_{B,25}, x_{A,26}, x_{B,26}, x_{A,27}, x_{B,27}, x_{A,28}, x_{B,28}, x_{A,29}, x_{B,29}, x_{A,30}, x_{B,30})$  e  $(x_{B,31}, x_{A,31}, x_{B,32}, x_{A,32}, x_{B,33}, x_{A,33}, x_{B,34}, x_{A,34}, x_{B,35}, x_{A,35}, x_{B,36}, x_{A,36}, x_{B,37}, x_{A,37}, x_{B,38}, x_{A,38}, x_{B,39}, x_{A,39}, x_{B,40}, x_{A,40})$ .

# Nivelamento geométrico ou directo

---

**Cálculo:**

$$d_j = x_{A,j} - x_{B,j} \quad j = 1, \dots, 40$$

$$\bar{d}_1 = \frac{\sum_{j=1}^{20} d_j}{20}$$

$$\bar{d}_2 = \frac{\sum_{j=21}^{40} d_j}{20}$$

$$r_j = \bar{d}_1 - d_j \quad , \quad j = 1, \dots, 20$$

$$r_j = \bar{d}_2 - d_j \quad , \quad j = 21, \dots, 40$$

$$\sum_{j=1}^{40} r_j^2 = \sum_{j=1}^{20} r_j^2 + \sum_{j=21}^{40} r_j^2$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{40} r_j^2}{v}}$$

$$v = 2(20 - 1) = 38$$

(s é o desvio padrão de um desnível correspondente a uma distância de 60 m)

$$\delta = \bar{d}_1 - \bar{d}_2$$

# Nivelamento geométrico ou directo

Pode obter-se uma relação entre o **desvio padrão para 1 km de nivelamento duplo** ( $s_{1\text{km nivelamento duplo}}$ ) e o desvio padrão  $s$  associado ao desnível correspondente à distância 60 m:

$$s_{1\text{km nivelamento duplo}} = \frac{s}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1000 \text{ m}}{60 \text{ m}}} = 2.89 s$$

Daqui tem-se que para um dado desnível correspondente a uma distância  $d(\text{m})$  observado com um aparelho cujo desvio padrão para 1 km de nivelamento duplo ( $s_{1\text{km nivelamento duplo}}$ ) é conhecido é possível associar o desvio padrão:

$$s^{\text{mm}} = s_{1\text{km nivelamento duplo}}^{\text{mm}} \sqrt{\frac{2 d(\text{m})}{1000}}$$

# Nivelamento geométrico ou directo

---

Interpretação dos resultados :

- a) O desvio padrão experimental  $s$  é aceitável relativamente ao correspondente desvio padrão  $\sigma$  indicado pelo fabricante?

sim se

$$s \leq \sigma \sqrt{\frac{\chi_{1-\alpha}^2(v)}{v}} = \sigma \sqrt{\frac{\chi_{0.95}^2(38)}{38}} = \sigma \sqrt{\frac{53.38}{38}} = 1.19 \sigma$$

- b) A diferença  $\delta$  das origens das duas miras é nula?

c) sim se

$$|\delta| \leq \frac{s}{\sqrt{10}} t_{1-\alpha/2}(v) = \frac{s}{\sqrt{10}} 2.02 = 0.64 s$$

# Nivelamento geométrico ou directo

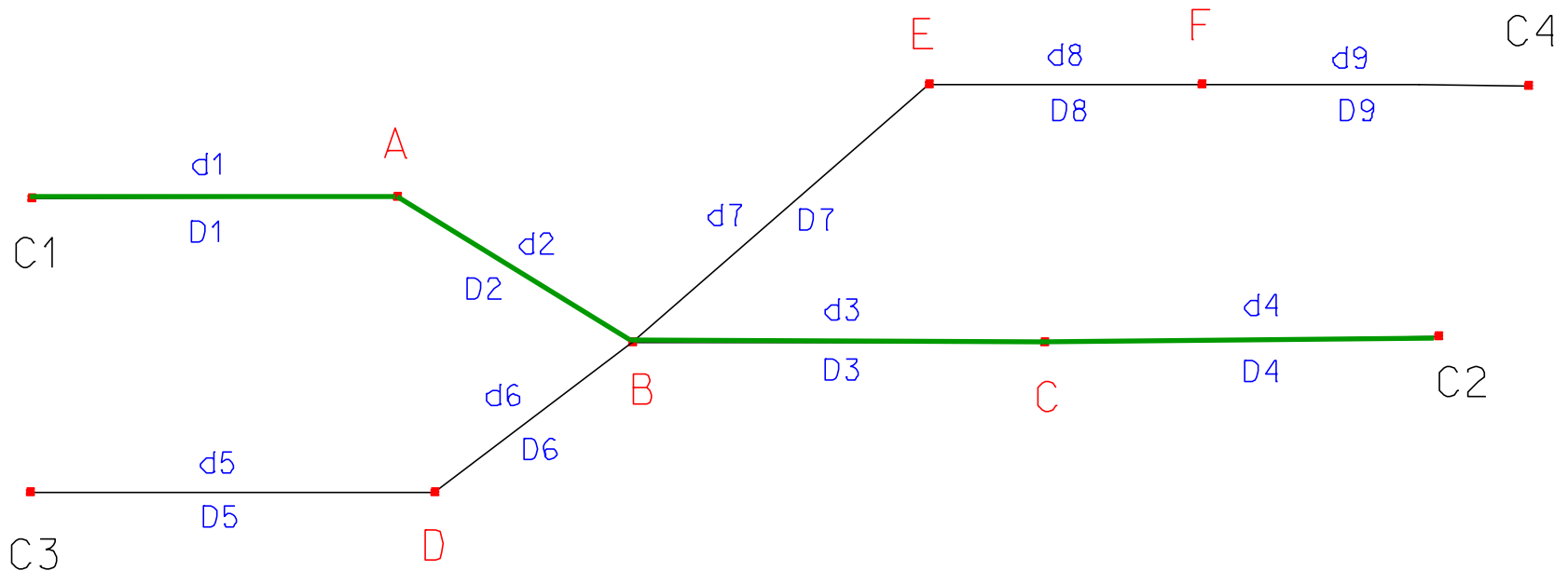
---

## Desvio padrão de um desnível:

O desvio padrão de um desnível varia de acordo como nível e a(s) mira(s) utilizados, o cuidado na realização da medição, a estabilidade dos pontos onde as miras são colocadas, a força do vento, os erros de leitura, etc, acumulando-se o efeito dos erros aleatórios. No caso do nivelamento de baixa precisão, tem-se: o erro de calagem da nivela tórica associada ao eixo principal (num nível não automático) é da ordem de  $\pm 0.5$  mm a 30 m; o erro devido à falta de verticalidade da mira é da ordem de  $\pm 1$  mm a 30 m; o erro associado ao suporte da mira no solo, com ou sem sapata, é da ordem de  $\pm 0.5$  mm. Assim, para uma visada tem-se um desvio padrão  $\sigma = \sqrt{(0.5^2 + 1^2 + 0.5^2)} = \pm 1.22$  mm. Para um desnível (duas visadas)  $\sigma = \pm 1.22\sqrt{2} = \pm 1.73$  mm. Para um percurso com N desníveis, tem-se  $\sigma = \pm 1.7\sqrt{N}$ .

# Nivelamento geométrico ou directo

**Exemplo: ajustamento (paramétrico) de uma rede de nivelamento:** suponha-se que se efectuou o cálculo do erro de fecho e da respectiva tolerância para as linhas de nivelamento C1-C2 e C3-C4 representadas na figura a partir do conhecimento das alts dos pontos C1, C2, C3 e C4, em que  $d_i$  representa o desnível e  $D_i$  a distância entre pontos e que ambas fechavam dentro da tolerância.





# Nivelamento geométrico ou directo

Sendo  $n=9$  o número de observações efectuadas (desníveis) e designando por  $n_0=6$  o número mínimo de variáveis que determinam o modelo (número de desniveis que permitem atribuir alt aos pontos A, B, C, D, E, F), a redundância é dada por  $r=n-n_0=3$ . Sendo o número de parâmetros (alts desconhecidas) representado por  $u=6$ , o número de equações que é possível estabelecer entre as  $n$  observações e os  $u$  parâmetros é  $c=r+u=9$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} C1 + d1 + v1 - A = 0 \\ A + d2 + v2 - B = 0 \\ B + d3 + v3 - C = 0 \\ C + d4 + v4 - C2 = 0 \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} C3 + d5 + v5 - D = 0 \\ D + d6 + v6 - B = 0 \\ B + d7 + v7 - E = 0 \\ E + d8 + v8 - F = 0 \\ F + d9 + v9 - C4 = 0 \end{array} \right.$$

# Nivelamento geométrico ou directo

Em forma matricial, este sistema de equações tem a forma

$$\vec{v}_{n,l} + A_{n,u} \vec{X}_{u,l} + \vec{W}_{n,l} = 0$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d1 + C1 \\ d2 \\ d3 \\ d4 - C2 \\ d5 + C3 \\ d6 \\ d7 \\ d8 \\ d9 - C4 \end{bmatrix} = 0$$

em que  $\vec{v}_{9,1}$  é o vector dos resíduos das observações. Este sistema não tem solução única, existindo infinitas combinações de resíduos que o verificam. Para que haja solução única, é necessário impor o critério dos mínimos quadrados:  $\sum_i v_i^2 = \min$  imo

Assim, pondo  $U = A^T P (-\vec{W})$ ,  $N = A^T P A$ , a **solução do sistema** (altitudes dos parâmetros) é dada por  $\vec{X} = N^{-1} U$ .

# Nivelamento geométrico ou directo

---

Suponha-se que a linha C1-C2 foi observada com o N3, cuja precisão, segundo o manual é 0.2 mm/km, e que a linha C3-C4 foi observada com o NAK2, cuja *precisão* é, segundo o manual, 0.3 mm/km. É assim necessário atribuir **pesos** às observações dependentes não só das distâncias  $D_i$  mas também do aparelho utilizado. Para o efeito recorre-se à variância a priori por unidade de peso  $\sigma_0^2$ , de tal forma que  $\sigma_0^2 = p_i \sigma_i^2$ , sendo  $p_i$  o peso do desnível  $d_i$ . Tomando para  $\sigma_0^2=1$ , vem  $p_i = 1 / \sigma_i^2$ , em que, conforme a linha,  $\sigma_i = 0.0003 \text{ m/km} \sqrt{\frac{2 D_i(\text{m})}{1000}}$  ou  $\sigma_i = 0.0002 \text{ m/km} \sqrt{\frac{2 D_i(\text{m})}{1000}}$  o que permite calcular a **matriz** (diagonal) **P** dos pesos das observações.

# Nivelamento geométrico ou directo

---

A precisão dos parâmetros estimados é dada pela matriz cofactor  $Q_{\vec{X}\vec{X}} = N^{-1}$ .

Uma vez estimado o vector  $\vec{X}$ , os resíduos obtêm-se de  $\vec{v}_{n,1} = \vec{W}_{n,1} - A_{n,u} \vec{X}_{u,1}$  e as estimativas por mínimos quadrados das observações são calculadas por

$\hat{\ell}_{n,1} = \bar{\ell}_{n,1} + \vec{v}_{n,1}$ , cuja precisão é dada pela matriz  $Q_{\hat{\ell}\hat{\ell}} = A_{n,u} N_{u,u}^{-1} A_{u,n}^T$

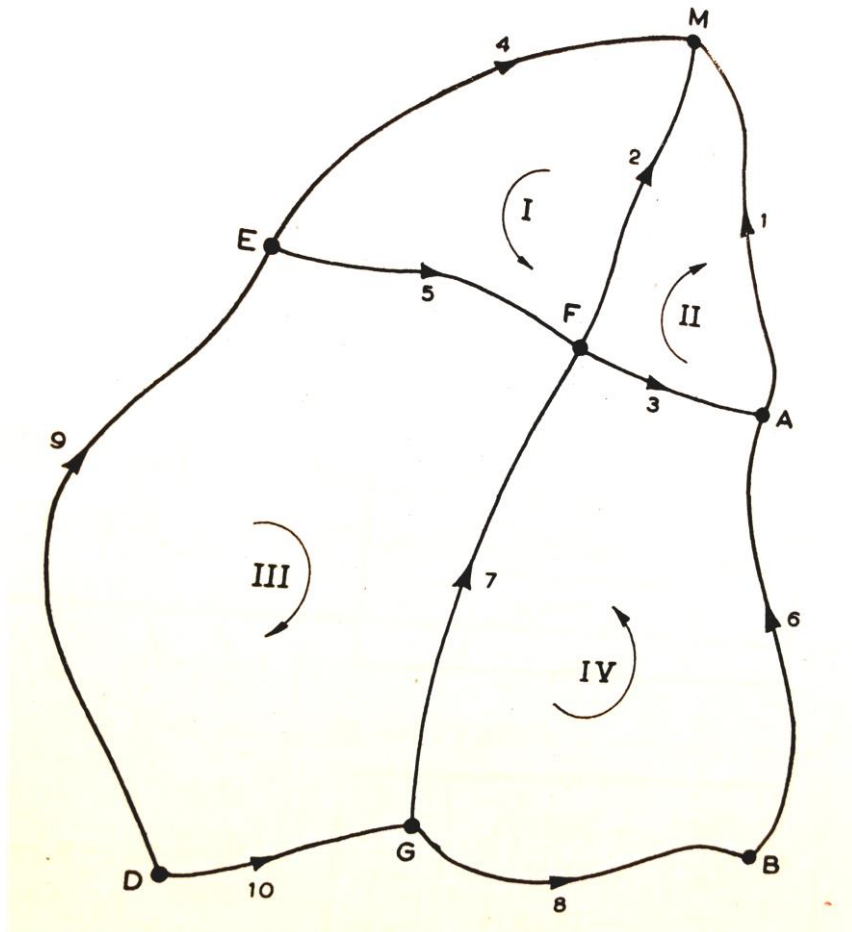
Pode ainda obter-se a variância por unidade de peso a posteriori  $s_0^2 = \frac{\vec{v}^T P \vec{v}}{r}$

O ajustamento é aceite se  $\sigma_0^2$  e  $s_0^2$  forem estatisticamente semelhantes, isto é:

$$\text{se } \frac{s_0^2}{\sigma_0^2} r \begin{cases} \leq \chi^2(r) & \text{aceita-se o ajustamento} \\ > \chi^2(r) & \text{rejeita-se o ajustamento} \end{cases}$$

# Nivelamento geométrico ou directo

Exemplo: ajuste a seguinte rede de nivelamento geométrico; supondo que a altitude do ponto A é igual a 123.456 m, calcule as altitudes dos pontos restantes; o aparelho utilizado foi um Leica NAK2.



Linha	Desnível	Comprimento
AM (1)	+11.2564 m	27 km
FM (2)	+30.0801 m	27 km
FA (3)	+18.8294 m	16 km
EM (4)	+22.0264 m	36 km
EF (5)	-8.0503 m	24 km
BA (6)	+18.9201 m	33 km
GF (7)	-12.1362 m	33 km
GB (8)	-12.2365 m	33 km
DE (9)	-15.2832 m	60 km
DG (10)	-11.1823 m	25 km

as setas indicam o sentido do percurso

# Nivelamento geométrico ou directo

---

**Modelo condicional:** nas equações apenas entram observações (desníveis) e constantes; supõe-se que os desníveis são não correlacionados e têm pesos que dependem do comprimento do lanço respectivo e do aparelho utilizado; neste caso tem-se que  $n = 10$ ,  $n_0 = 6$  (bastam 6 desníveis para relacionar os 7 pontos) e portanto a redundância é  $r = n - n_0 = 10 - 6 = 4$ ; sendo  $u$  o número de parâmetros,  $u = 0$ , donde finalmente o número de equações de condição é  $c=r+u=4$ , podendo por exemplo escrever-se o seguinte sistema de equações de condição:

$$\left[ \begin{array}{l} (\text{desnível}_5 + \gamma_5) + (\text{desnível}_2 + \gamma_2) = (\text{desnível}_4 + \gamma_4) \\ (\text{desnível}_3 + \gamma_3) + (\text{desnível}_1 + \gamma_1) = (\text{desnível}_2 + \gamma_2) \\ (\text{desnível}_9 + \gamma_9) + (\text{desnível}_5 + \gamma_5) = (\text{desnível}_7 + \gamma_7) + (\text{desnível}_{10} + \gamma_{10}) \\ (\text{desnível}_7 + \gamma_7) + (\text{desnível}_3 + \gamma_3) = (\text{desnível}_6 + \gamma_6) - (\text{desnível}_8 + \gamma_8) \end{array} \right.$$

# Nivelamento geométrico ou directo

$$\gamma_5 + \gamma_2 - \gamma_4 = -\text{desnível}_5 - \text{desnível}_2 + \text{desnível}_4 = 8.0503 - 30.0801 + 22.0264 = -0.0034$$

$$\gamma_3 + \gamma_1 - \gamma_2 = -\text{desnível}_3 - \text{desnível}_1 + \text{desnível}_2 = -18.8294 - 11.2564 + 30.0801 = -0.0057$$

$$\gamma_9 + \gamma_5 - \gamma_7 - \gamma_{10} = -\text{desnível}_9 - \text{desnível}_5 + \text{desnível}_7 + \text{desnível}_{10} = 15.2832 + 8.0503 - 12.1362 - 11.1823 = 0.0150$$

$$\gamma_7 + \gamma_3 - \gamma_6 - \gamma_8 = -\text{desnível}_7 - \text{desnível}_3 + \text{desnível}_6 + \text{desnível}_8 = 12.1362 - 18.8294 + 18.9201 - 12.2365 = -0.0096$$

Em notação matricial:  $A_{4,10} \vec{v}_{10,1} = \vec{f}_{4,1}$  , com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} -0.0034 \\ -0.0057 \\ 0.0150 \\ -0.0096 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{bmatrix}$$

# Nivelamento geométrico ou directo

A solução do sistema de equações obtém-se de:

$$\vec{k}_{4,1} = (A_{4,10} Q_{10,10} A_{10,4}^T)^{-1} \vec{f}_{4,1}$$
$$\vec{v}_{10,1} = Q_{10,10} A_{4,10}^T \vec{k}_{4,1}$$
$$\vec{\ell}_{10,1} = \vec{\ell}_{10,1} + \vec{v}_{10,1}$$
$$\vec{\ell} = \begin{bmatrix} \text{desnível1} \\ \text{desnível2} \\ \text{desnível3} \\ \text{desnível4} \\ \text{desnível5} \\ \text{desnível6} \\ \text{desnível7} \\ \text{desnível8} \\ \text{desnível9} \\ \text{desnível10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.2564 \\ 30.0801 \\ 18.8294 \\ 22.0264 \\ -8.0503 \\ 18.9201 \\ -12.1362 \\ -12.2365 \\ -15.2832 \\ -11.1823 \end{bmatrix}$$

$$Q_{v,v} = Q_{10,10} A_{4,10}^T (A_{4,10} Q_{10,10} A_{10,4}^T)^{-1} A_{4,10} Q_{10,10}$$

$$Q_{\hat{\ell}}, \hat{\ell} = Q_{10,10} - Q_{v,v}$$



# Nivelamento geométrico ou directo

<code>k =</code>	<code>v =</code>	<code>l_ajust =</code>
-592.1324	-0.0031	11.2533
-637.1829	0.0002	30.0803
642.6121	-0.0024	18.8270
-190.7148	0.0038	22.0302
	0.0002	-8.0501
	0.0011	18.9212
	-0.0049	-12.1411
	0.0011	-12.2354
	0.0069	-15.2763
	-0.0029	-11.1852

$$\text{desnivel5} + \text{desnivel2} - \text{desnivel4} = -8.0501 + 30.0803 - 22.0302 = 0$$

$$\text{desnivel3} + \text{desnivel1} - \text{desnivel2} = 18.8270 + 11.2533 - 30.0803 = 0$$

$$\text{desnivel9} + \text{desnivel5} - \text{desnivel7} - \text{desnivel10} = -15.2763 - 8.0501 + 12.1411 + 11.1852 = -0.0001$$

$$\text{desnivel7} + \text{desnivel3} - \text{desnivel6} - \text{desnivel8} = -12.1411 + 18.8270 - 18.9212 + 12.2354 = 0.0001$$

desníveis ajustados

# Nivelamento geométrico ou directo

---

Assim, tem-se:

$$\begin{aligned}M - A = 11.2533 &\Rightarrow M = 123.456 + 11.2533 = 134.709 \text{ m} \\A - F = 18.8270 &\Rightarrow F = 123.456 - 18.8270 = 104.629 \text{ m} \\A - B = 18.9212 &\Rightarrow B = 123.456 - 18.9212 = 104.535 \text{ m} \\G - B = 12.2354 &\Rightarrow G = 104.535 + 12.2354 = 116.770 \text{ m} \\D - G = 11.1852 &\Rightarrow D = 116.770 + 11.1852 = 127.955 \text{ m} \\E - F = 8.0501 &\Rightarrow E = 104.629 + 8.0501 = 112.679 \text{ m}\end{aligned}$$

ou ainda, seguindo percursos diferentes:

$$\begin{aligned}D - E = 15.2763 &\Rightarrow E = 127.955 - 15.2763 = 112.679 \text{ m} \\M - E = 22.0302 &\Rightarrow M = 112.679 + 22.0302 = 134.709 \text{ m}\end{aligned}$$

**Note-se que só é possível transformar desníveis, ajustados ou não ajustados, em altitudes, se for conhecida a altitude de algum dos pontos (rede em que o datum (altimétrico, neste caso) está definido).**

# Nivelamento geométrico ou directo

**Modelo paramétrico:** de  $n = 10$  e  $n_0 = 6$  (bastam 6 desníveis para relacionar os 7 pontos), a redundância é  $r = n - n_0 = 10 - 6 = 4$ ; sendo  $u = 6$  (pontos com alt desconhecida: B, C, D, E, F, G), o número de equações é  $c=r+u=10$ , podendo por exemplo escrever-se o seguinte sistema de equações que relacionam os 6 parâmetros com as 10 observações (cada equação contém uma única observação:

$$A + \text{desnível1} + u_1 = M$$

$$F + \text{desnível2} + u_2 = M$$

$$F + \text{desnível3} + u_3 = A$$

$$E + \text{desnível4} + u_4 = M$$

$$E + \text{desnível5} + u_5 = F$$

$$B + \text{desnível6} + u_6 = A$$

$$G + \text{desnível7} + u_7 = F$$

$$G + \text{desnível8} + u_8 = B$$

$$D + \text{desnível9} + u_9 = E$$

$$D + \text{desnível10} + u_{10} = G$$

ou

$$-M + u_1 = -\text{desnível1} - A$$

$$F - M + u_2 = -\text{desnível2}$$

$$F + u_3 = -\text{desnível3} + A$$

$$E - M + u_4 = -\text{desnível4}$$

$$E - F + u_5 = -\text{desnível5}$$

$$B + u_6 = -\text{desnível6} + A$$

$$G - F + u_7 = -\text{desnível7}$$

$$G - B + u_8 = -\text{desnível8}$$

$$D - E + u_9 = -\text{desnível9}$$

$$D - G + u_{10} = -\text{desnível10}$$

# Nivelamento geométrico ou directo

Em forma matricial, este sistema de equações tem a forma  $\vec{v}_{n,1} + A_{n,u}\vec{X}_{u,1} + \vec{B}_{n,1} = 0$

em que  $\vec{v}_{10,1}$  é o vector dos resíduos das observações. Este sistema não tem solução única,

existindo infinitas combinações de resíduos que o verificam. Para que haja solução única, é

necessário impor o critério dos mínimos quadrados:  $\sum_i v_i^2 = \text{minimo}$

Assim, pondo  $N = A^T P A$ ,  $U = A^T P (-\vec{B})$ , a **solução do sistema** (alts dos parâmetros) é

dada por  $\vec{X} = N^{-1}U$

A =

-1	0	0	0	0	0
-1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
-1	0	0	0	0	1
0	-1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0
0	-1	0	1	0	0
0	0	-1	1	0	0
0	0	0	0	1	-1
0	0	0	-1	1	0

B =

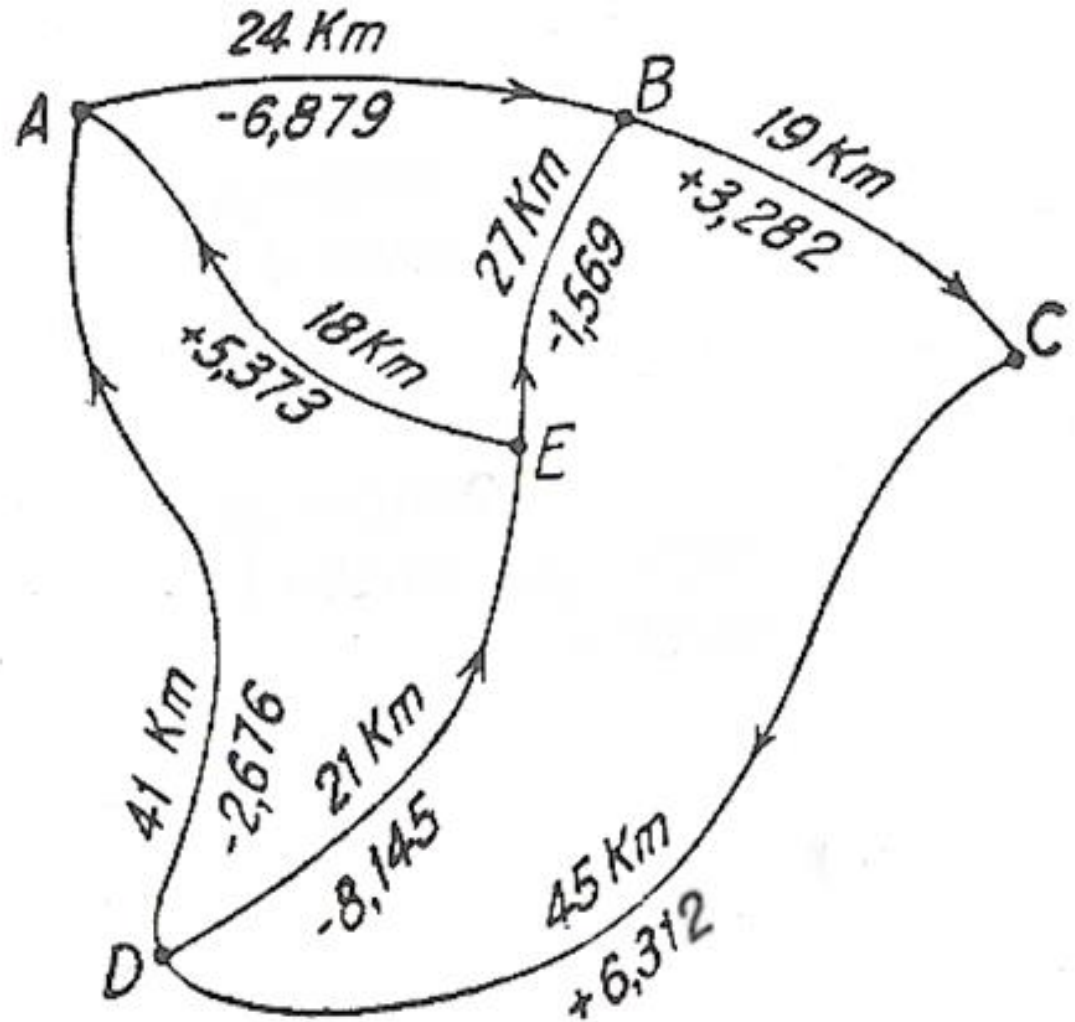
134.7124
30.0801
-104.6266
22.0264
-8.0503
-104.5359
-12.1362
-12.2365
-15.2832
-11.1823

X =

134.7093	134.709
104.6290	104.629
104.5348	104.535
116.7701	116.770
127.9553	127.955
112.6791	112.679

# Nivelamento geométrico ou directo

Exemplo: ajuste a seguinte rede de nivelamento geométrico; supondo que a alt do ponto A é igual a 123.456 m, calcule as alts dos pontos restantes; o aparelho utilizado foi um Leica NA2.



# Nivelamento geométrico ou directo

- INFORMAÇÃO CADASTRAL
- INFORMAÇÃO CARTOGRÁFICA
- INFORMAÇÃO GEODÉSICA

## INFORMAÇÃO GEODÉSICA

### Marcas de Nivelamento Geométrico



#### Descrição

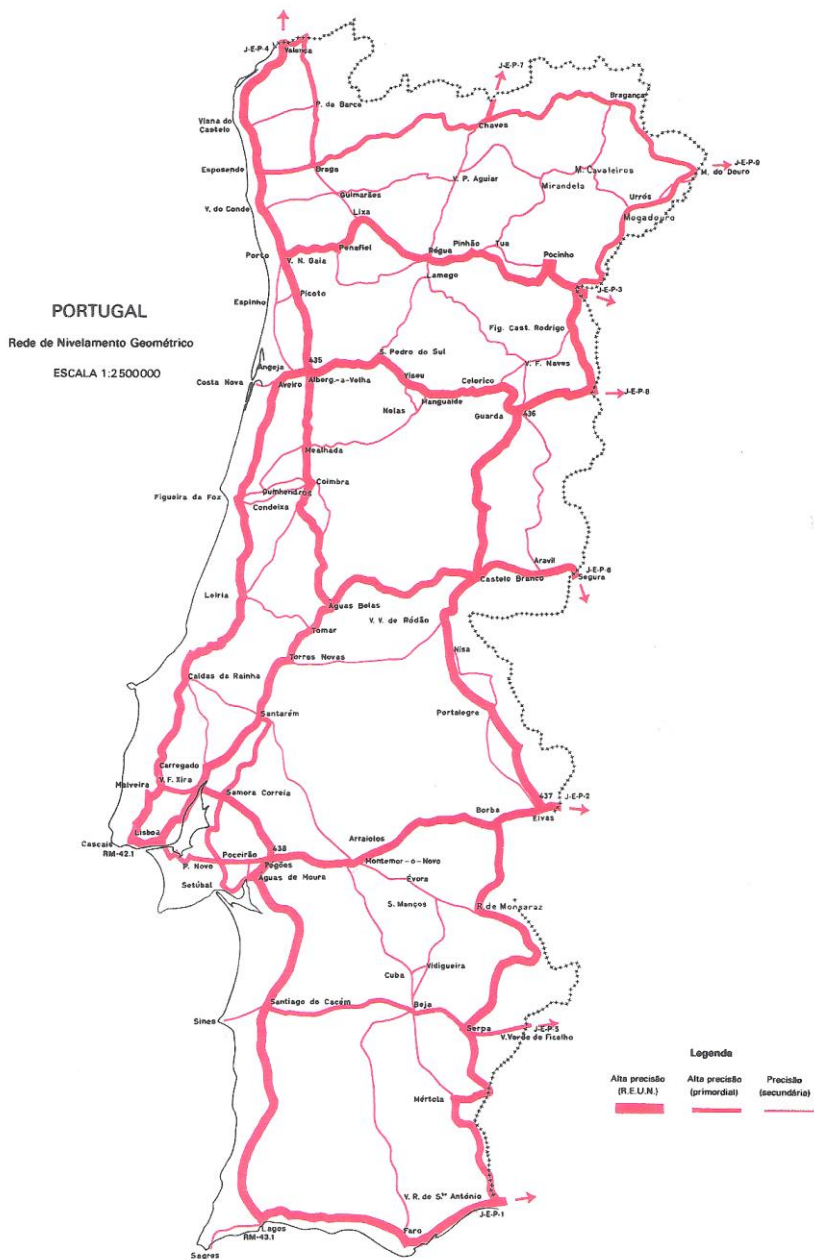
A **Rede de Nivelamento Geométrico de Alta Precisão (RNGAP)** constitui um sistema de altitudes rigorosamente determinadas que permitem a referenciação, com alta precisão, da altimetria de qualquer ponto.

A **RNGAP** distribui-se ao longo das principais vias de comunicação do País, com um comprimento de cerca de 4000 km. Esta rede é constituída por mais de 4500 marcas de nivelamento, tendo a sua marca fundamental situada junto ao marégrafo de Cascais, de forma a assegurar a ligação entre o nivelamento e o datum altimétrico de Portugal Continental.

Preçário

Altitudes das Marcas de Nivelamento

# Nivelamento geométrico ou directo



## Ficha de Marca de Nivelamento

CIGC/DSG

REDE DE NIVELAMENTO GEOMÉTRICO

INFO EXTERNA

NP : 001  
LINHA : 01-00 CASCAIS  
SECÇÃO : 01-00 Cascais

MONÇÃO  
S. Julião da Barra

TOTAL TESTEM : 4

ALTITUDE H<sub>1938</sub> :  
13.361 m

DISTRITO : LISBOA  
CONCELHO : CASCAIS  
FREGUESIA : CASCAIS

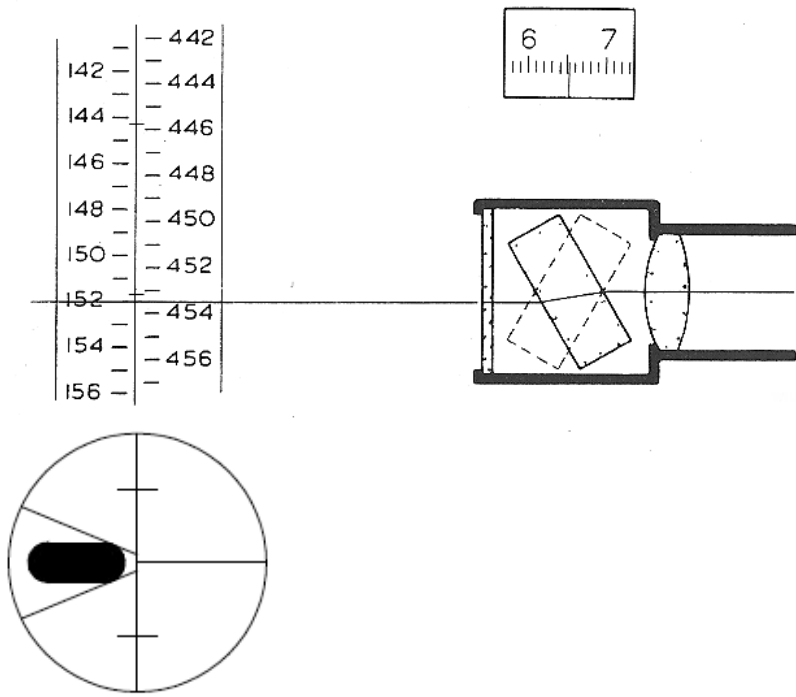
FOLHA 1/50000 : 34-C

COORD APROXIMADAS:

M = -111.9 km  
P = -107.3 km

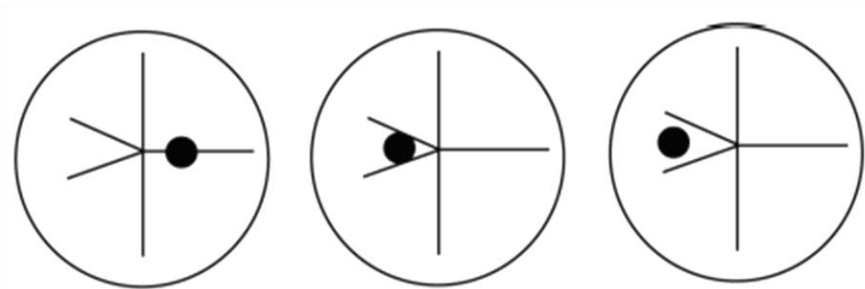
Cascais. Marca de bronze de primeira classe, chumbada no extremo esquerdo da soleira da porta principal da Cidadela.

# Nivelamento geométrico ou directo



No caso de o aparelho estar próximo da mira e portanto os traços da graduação aparecerem muito ampliados, para efectuar a leitura na mira, coloca-se um dos traços centimétricos exactamente entre os **dois traços da cunha formada pelos fios do retículo**. Quando a mira tiver duas divisões, é possível efectuar 4 leituras em cada estacionamento do aparelho.

Mira de ínvar de 4 m



incorrecto

correcto

incorrecto





# Nivelamento geométrico ou directo

---

## Instituto Geográfico e Cadastral Direcção dos Serviços de Geodesia Serviço de Nivelamento

### I - Normas relativas ao reconhecimento, localização e descrição das marcas de nivelamento

**1.1.** A distância entre marcas consecutivas da linha não deverá ser inferior a 500 m nem exceder 1000 m.

**1.2.** A distância entre marcas de 1ª classe não deverá ser inferior a 10 km nem exceder 20 km, exceptuando-se os casos de sedes de concelho que distem menos de 10 km.

**1.3.** Cada marca de uma linha de nivelamento terá, em regra, uma testemunha. A testemunha será constituída por uma marca de 2ª classe colocada sobre rocha ou construção, quando possível independente do suporte da marca da linha e apresentando não inferiores condições de estabilidade e conservação. A distância, desnível e localização da testemunha deverão ser tais que simplifiquem as operações de ligação com a marca da linha sem que, no entanto, se prestem a confusão com a mesma marca. A distância deverá ser tal que não exija mais de duas estações de nível para a ligação. Cada marca de 1ª classe terá, pelo menos, três testemunhas. As testemunhas das marcas deverão ser comparadas quando se termina o troço e novamente quando se inicia o troço contíguo.

**1.4.** A descrição de cada marca será, por si só, suficientemente esclarecedora. Deverá ser redigida em períodos que constituam sucessivamente restrições da indicação anterior:  $\odot$ , EN, lugar de, ao km, do lado, casa, implantada em.

**1.5.** A descrição das testemunhas será, propositadamente, redigida como anexo da descrição da respectiva marca de nivelamento. A descrição das marcas de 1ª classe e respectivas testemunhas será acompanhada de provas fotográficas picadas e respectivas películas.

# Nivelamento geométrico ou directo

---

## II - Normas relativas à execução e registo das operações de nivelamento de alta precisão

**2.1.** Em cada linha de nivelamento define-se um sentido directo e a este corresponde o sentido crescente da numeração das secções e das marcas dentro de cada secção. Uma operação respeitante a cada troço é designada por um símbolo constituído pelo algarismo árabe indicativo da ordem cronológica da operação seguido da letra indicativa do sentido da progressão (D=directo, I=inverso), como por exemplo 1D, 2I, 3D.

**2.2.** Como regra apenas sujeita a excepções justificadas: a primeira operação efectua-se progredindo no sentido directo (1D); a segunda operação, no sentido inverso (2I); uma primeira repetição, no sentido directo (3D); se outra repetição se tornar necessária deverá ser (4I); e assim sucessivamente.

**2.3.** Cada caderneta respeitará a um só observador, a troços de uma só secção e às primeiras operações (1), ou às segundas operações (2) ou às repetições (R). Cada caderneta será designada por um símbolo composto de a) Letra maiúscula indicativa da linha, b) Número de ordem da secção, c) Símbolo das operações, d) Letra minúscula indicativa da ordem, como por exemplo: A-III-1D-a, B-IV-2I-b, C-IV-R-a.

**2.4.** Antes de começar a nivelar o operador deverá: 1) **verificar se as miras estão rectificadas** e, se não estiverem, deverá rectifica-las. 2) pelo menos uma vez por mês, **verificar se o nível está rectificado** e, sendo necessário, fazer a sua rectificação de acordo com as normas a seguir para cada instrumento, devendo estas operações ficar registadas na caderneta. No início de cada sessão de nivelamento, o operador anotarà na caderneta: 1) a secção, o troço, a operação, o instrumento, as miras, a data; 2) a hora TU, a temperatura do ar, a direcção do Sol, a nebulosidade, a direcção e intensidade do vento; o registo destas indicações faz-se de maneira convencional e repetir-se-á no decurso da sessão se tal se tornar conveniente e, sempre no final de cada troço ou de cada sessão.

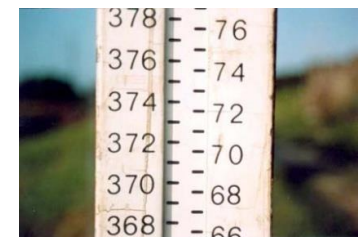
# Nivelamento geométrico ou directo

**2.5.** O operador anotarà na caderneta as miras a que respeitam as leituras registadas. A mesma mira será colocada nas marcas extremas de troço e respectivas testemunhas. No nivelamento de um troço, cada mira será observada tantas vezes à rectaguarda como à frente. A mira colocada na marca inicial do troço continua a ser sempre lida em primeiro lugar em cada estação, efectuando-se assim em primeiro lugar a leitura na mira da rectaguarda ou na da frente, alternadamente. **Para a equidistância do nível às estações de mira admite-se uma tolerância de 1.00 m e para as distâncias do nível à mira, um máximo de 50 m.** A linha de pontaria correspondente ao traço nivelador deverá distar do terreno um mínimo de 0.50 m.

**2.6.** Cada grupo de observação compreende um engenheiro operador (observador e registador) e quatro auxiliares (dois porta-miras, um porta-chapéu e um porta-instrumento). **O método de leitura adoptado é o seguinte: a primeira leitura é feita na escala da esquerda da mira 1, a segunda é feita na escala da esquerda da mira 2 e em seguida, na escala da direita desta mesma mira para, finalmente se fazer a leitura da escala da direita da mira 1.** A comparação entre a última leitura e a primeira permite detectar qualquer alteração de posição havida entre as duas leituras.

**2.7.** A observação de cada mira constará das seguintes leituras com o micrómetro: **a) na escala de menor graduação – traços estadimétricos e traço nivelador, b) na escala de maior graduação – somente o traço nivelador.** Efectua-se imediatamente a verificação das leituras a) pelo confronto da média das leituras dos traços estadimétricos para a leitura do traço nivelador. Efectua-se imediatamente a verificação das leituras b) pelo confronto com o desfasamento das duas escalas, conhecidas para cada mira, sendo a tolerância de **0.05 mm.**

No caso do nível Zeiss NI 002 não é possível esta verificação.



# Nivelamento geométrico ou directo

---

**2.8.** O operador efectuará em gabinete uma segunda verificação dos registos e repetirá imediatamente e no mesmo sentido a operação cujos registos não obedecem às prescrições anteriores (registo na mesma caderneta). Cada operador verificará as descrições das marcas de nivelamento constantes da lista estabelecida pelo reconhecedor e eventualmente rectificadas ou alteradas pelo executor da operação anterior. Introduzirá nessa lista as rectificações necessárias e transcreverá as descrições corrigidas para as folhas da caderneta, no local próprio. Cada caderneta completamente preenchida será remetida para a DSG sob registo postal. A remessa será anunciada por ofício. A receção será notificada ao operador.

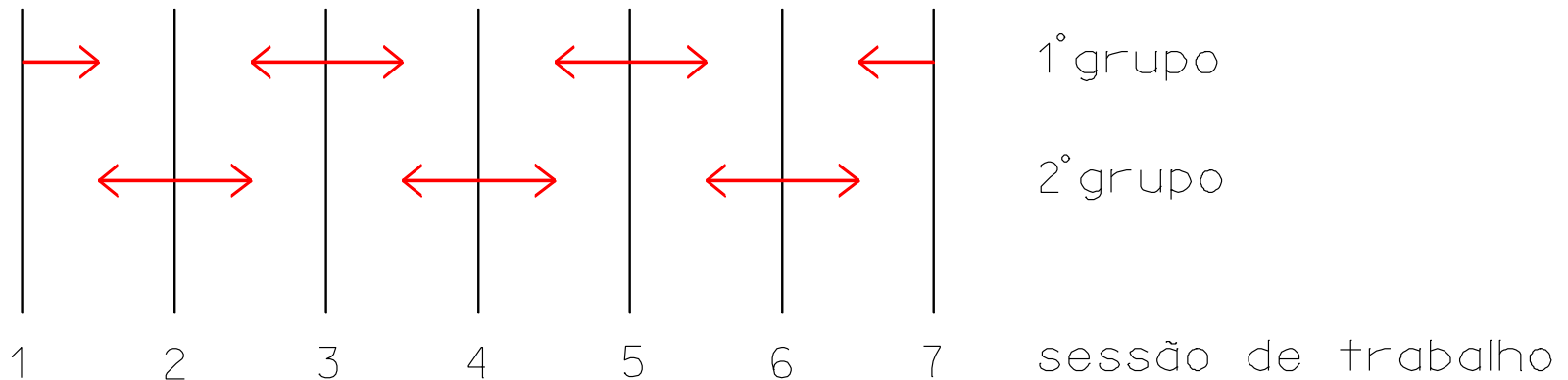
**2.9.** Os operadores que formam uma equipa de trabalho dividirão entre si as eventuais repetições que se tornem necessárias, bem como derivações para sinais geodésicos. Os troços a repetir serão indicados pela DSG à equipa de trabalho logo após a revisão dos registos que será feita na sede.

**2.10.** As marcas eventualmente colocadas pelo operador para subdivisão de troços muito extensos ou excepcionalmente difíceis deverão receber designações tais como  $\odot_8A$ , marca que subdivide o troço  $\odot_8 - \odot_9$ ,  $\odot_9A$ ,  $\odot_9B$ , marcas que subdividem o troço  $\odot_9 - \odot_{10}$ , etc. Nas descrições far-se-á referência ao desaparecimento e à substituição (nota: a numeração das marcas só apresenta real interesse e deverá ser rodeada de símbolos esclarecedores e que evitem confusões depois de sobre elas terem sido efectuadas operações. É desnecessário a obediência aos números que vieram do reconhecimento ou da implantação e o aparecimento, logo nas operações 1D, de designações tais como 13A, 13B, ...; os sufixos A, B, ... Devem ser reservados para manifestar que houve substituição de marcas ou desdobramentos de troços por necessidade ou conveniência – o que só tem interesse pela referência que estabelece com medições já efectuadas.

# Nivelamento geométrico ou directo

---

2.11. Sistema de trabalho: cada equipa de trabalho é constituída por dois grupos. Com o objectivo de combater erros sistemáticos, em cada sessão de trabalho os grupos alternarão o sentido de marcha de acordo com o seguinte plano:



Tolerâncias admitidas:

- Por troço:  $0.3 \sqrt{n}$ ,  $n$  = número de estações

- Por secção:  $1.5 \sqrt{K}$ ,  $K$  = extensão em quilómetros

# Nivelamento geométrico ou directo

---

## III - Normas relativas a derivações para vértices geodésicos

Antes do início dos trabalhos de campo, deverá tomar-se nota das indicações relativas aos vértices que, pela sua proximidade da linha de nivelamento a executar, devem ficar ligados por derivações. Estas derivações deverão ser executadas pelo operador que fizer a segunda operação. Depois de executada a derivação deverá fazer-se a medição da altura do vértice geodésico com uma fita métrica de aço.

# Nivelamento geométrico ou directo

## INFORMAÇÃO GEODÉSICA

### Aferição de Distanciómetros, Teodolitos e Níveis



#### Descrição

O IGP efectua a aferição de instrumentos topográficos - distanciómetros, teodolitos e níveis - de acordo com as normas ISO.

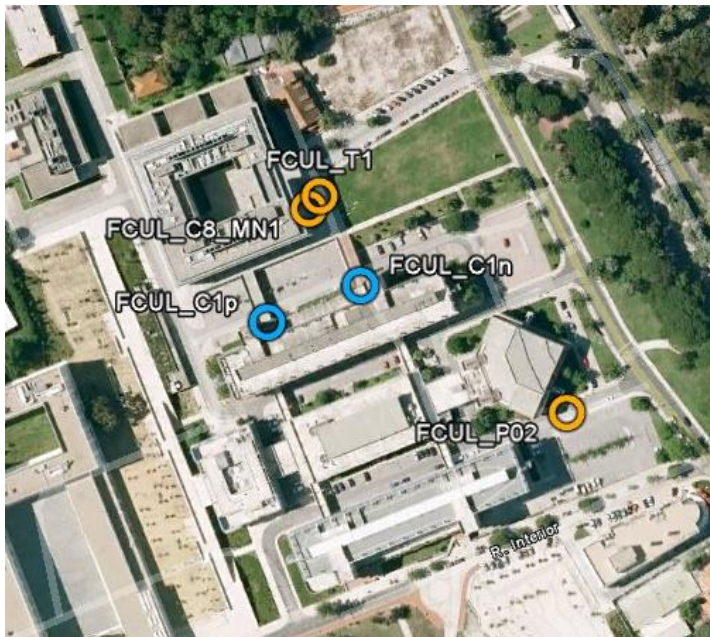
A aferição de distanciómetros e teodolitos é realizada na Base Padrão da Mata das Virtudes, junto à Azambuja. Ali são efectuadas observações para a determinação da precisão de uma distância medida por um distanciómetro, assim como da precisões angulares de teodolitos.

As observações para a aferição de níveis são realizadas numa base de nivelamento existente no Parque Municipal de Oeiras.

#### Preçário

VOLTAR

# Nivelamento geométrico ou directo



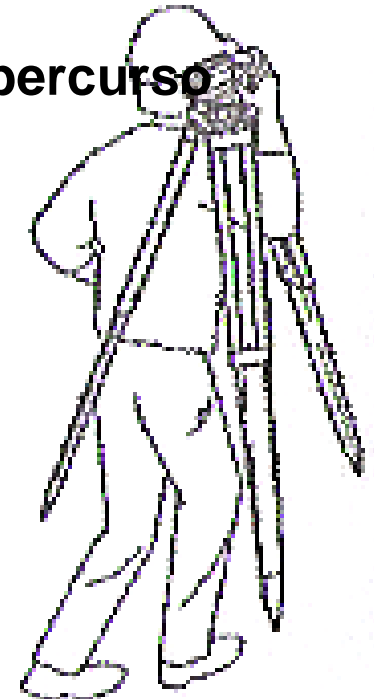
Ponto	alt	Descrição
FCUL_T1	80.108 m	Marca cravada no lado NW do degrau superior da escada em frente do Edifício C8 que dá para o parque de estacionamento
FCUL_P02	76.947 m	Marca metálica sobre lancil, a 5m SW do início da curva de saída do lancil, lado da estrada.
C1-nascente (C1n)	80.567 m	Marca na entrada (nascente) do edifício C1, a partir do viaduto de ligação ao C8
FCUL_MN1	80.765 m	Marca no degrau superior da soleira da porta SE de emergência, junto ao bar
C1-poente (C1p)	80.562 m	Marca na entrada (poente) do edifício C1, a partir do viaduto de ligação ao C8.
M3	75.230 m	Marca do IGP, linha Monção-Cascais. Cimentada no 1º degrau à esquerda na porta principal da Igreja do Campo Grande

## Marcas de nivelamento na FCUL



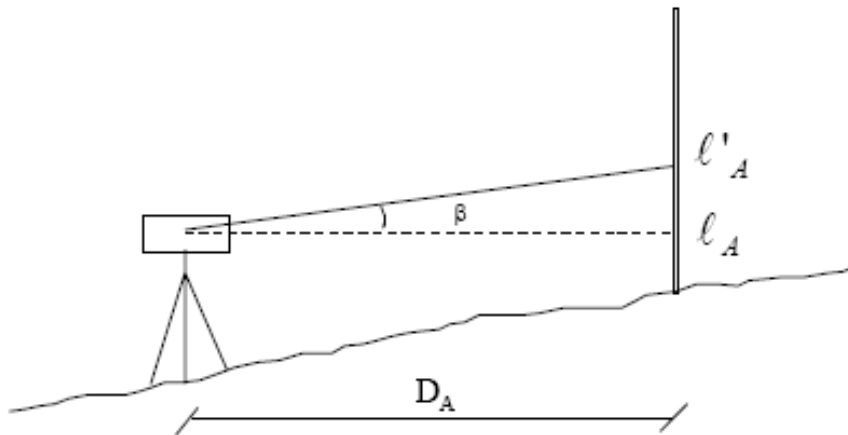
# Nivelamento geométrico ou directo

1. Estudar o percurso do nivelamento
2. Reduzir ao mínimo o número de estações
3. Antecipar, em cada estação, o ponto estação seguinte
4. Respeitar sempre que possível a igualdade para as distâncias
5. Respeitar as regras de segurança ao longo do percurso
6. Transportar o nível na vertical, sobre o ombro



# Nivelamento geométrico ou directo

O **erro de colimação** surge do facto de a visada efectuada com o nível não ser rigorosamente horizontal, existindo uma ligeira inclinação em relação à horizontal, designada por  $\beta$  na figura. Nestas condições, em vez de ser feita a leitura  $l_A$  na mira, faz-se a leitura  $l'_A$  (se a linha de pontaria estiver para cima da horizontal, o erro de colimação  $\beta$  é positivo, se a linha de pontaria descer em relação à horizontal  $\beta$  é negativo).



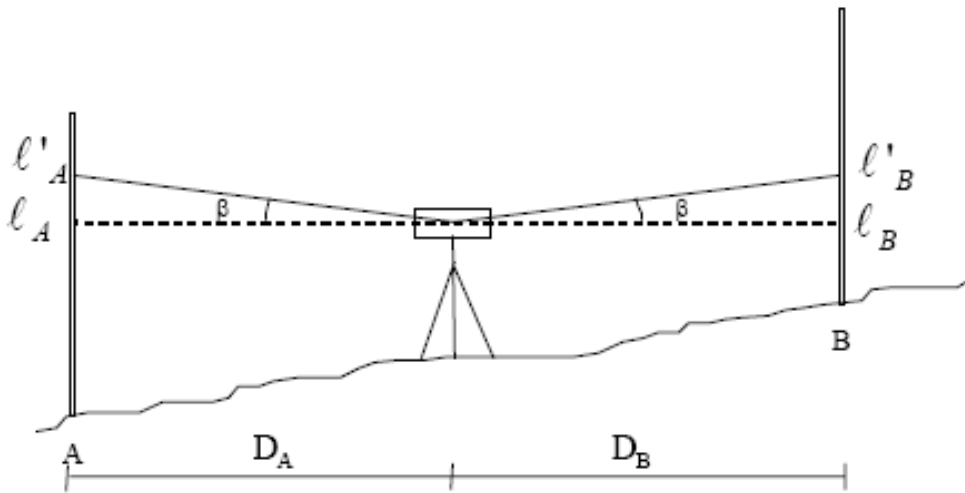
$$\text{De } \operatorname{tg} \beta = \frac{l'_A - l_A}{D_A}$$

$$\text{tem-se } l'_A - l_A = D_A \operatorname{tg} \beta$$

$$\text{donde } l_A = l'_A - D_A \operatorname{tg} \beta$$

# Nivelamento geométrico ou directo

**Método das visadas iguais:** este método consiste em estacionar o nível a igual distância dos dois pontos onde é colocada a mira. No caso da figura a mira é colocada nos pontos A e B, sendo  $D_A = D_B$ .



O erro linear na mira em A que resulta do erro de colimação é:

$$\ell'_A - \ell_A = D_A \operatorname{tg} \beta$$

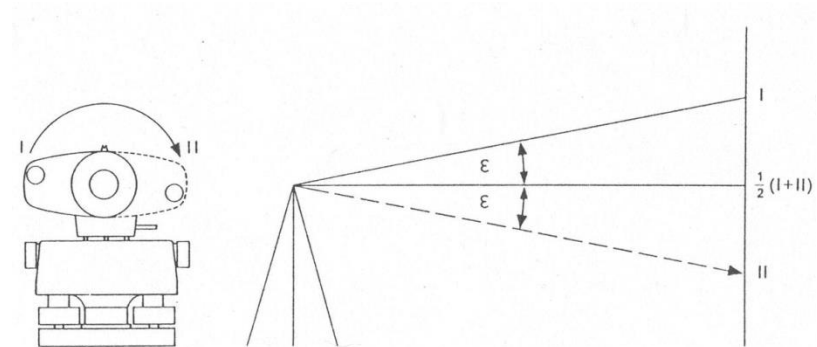
$$\begin{aligned} dN_{AB} &= \ell_A - \ell_B \\ &= \ell'_A - D_A \operatorname{tg} \beta - \ell'_B + D_B \operatorname{tg} \beta = \\ &= \ell'_A - \ell'_B - D_A \operatorname{tg} \beta + D_B \operatorname{tg} \beta = \\ &= \ell'_A - \ell'_B = dN'_{AB} \end{aligned}$$

# Nivelamento geométrico ou directo

**Método das visadas revertidas:** alguns níveis reversíveis podem rodar a luneta 180° em torno do eixo óptico da luneta, de forma a que, para uma pontaria a uma mira num ponto A, o eixo de colimação ocupa uma posição simétrica relativamente ao plano horizontal em cada uma das posições, sendo o erro linear devido ao erro de colimação dado por  $D \tan \beta$ , num dos casos e por  $-D \tan \beta$  no outro caso, dando a média das duas leituras o valor correcto.

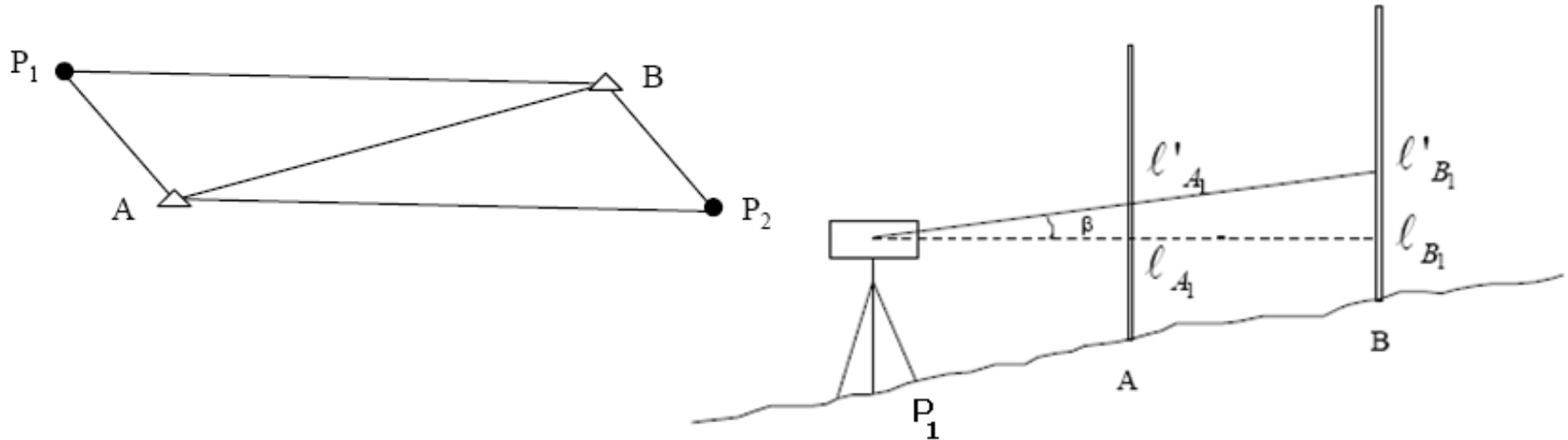


N2



# Nivelamento geométrico ou directo

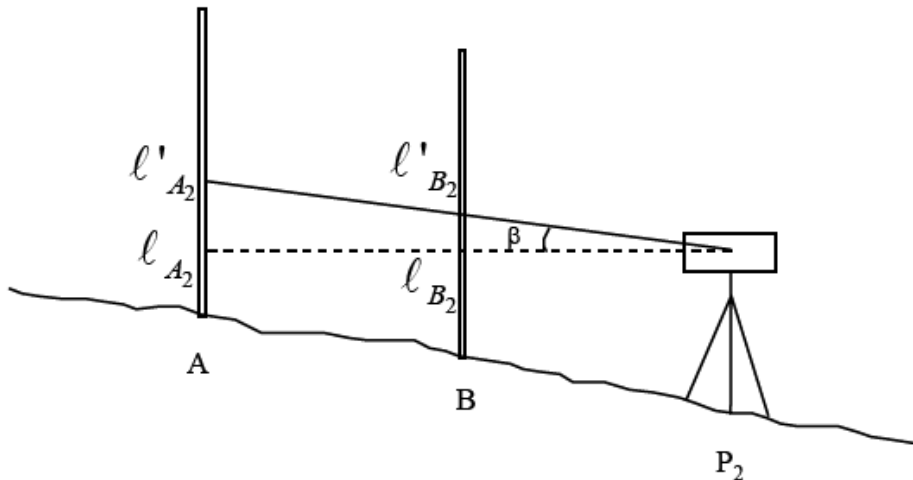
**Método das visadas recíprocas:** neste método fazem-se dois estacionamentos com o nível, em  $P_1$  e  $P_2$ , de forma a que  $P_1A \approx P_2B$  e  $P_1B \approx P_2A$ .



Ao estacionar em  $P_1$ , junto ao ponto  $A$ , se não houver erro de colimação, a linha de visada fica horizontal, obtendo-se nas miras as leituras  $l_{A1}$  e  $l_{B1}$ , sendo a diferença de nível correcta dada por  $dN = l_{A1} - l_{B1}$ . Havendo erro de colimação  $\beta$ , obtêm-se nas miras as leituras  $l'_{A1}$  e  $l'_{B1}$ , que conduzem a um valor incorrecto da diferença de nível  $dN' = l'_{A1} - l'_{B1}$ .

# Nivelamento geométrico ou directo

Estacionando de seguida em  $P_2$ , junto de B, obtêm-se as leituras nas miras  $l_{B2}$  e  $l'_{B2}$ . A diferença de nível correcta é dada por  $dN = l_{A2} - l_{B2}$ , enquanto que a diferença de nível afectada do erro de inclinação é dada por  $dN' = l_{A2'} - l_{B2'}$ .



Como o ângulo  $\beta$  se mantém invariável e como  $P_1A \approx P_2B$  e  $P_1B \approx P_2A$ , tem-se:

$$l'_{B1} - l_{B1} = l'_{A2} - l_{A2}$$

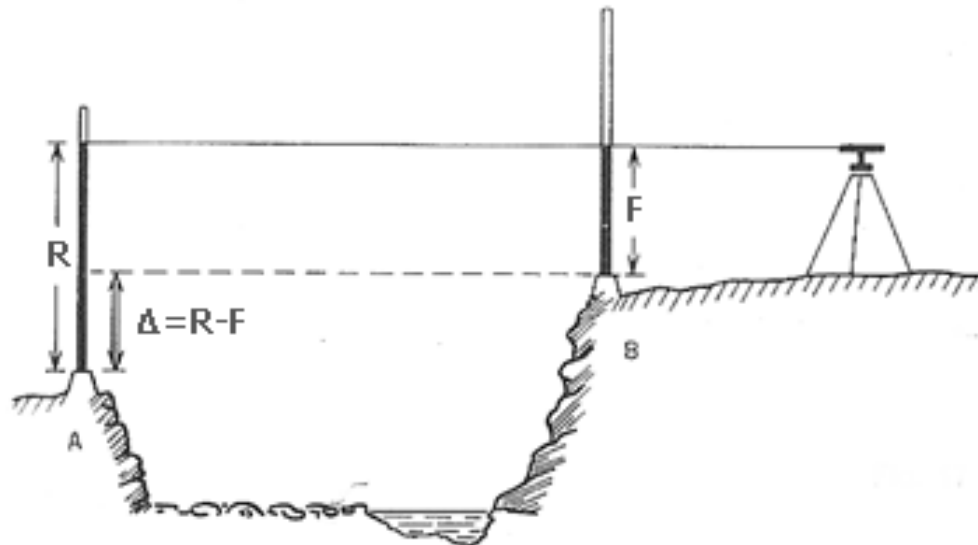
$$l'_{B2} - l_{B2} = l'_{A1} - l_{A1}$$

Subtraindo membro a membro estas igualdades obtém-se:  $dN_{AB} = \frac{dN'_{AB} + dN''_{AB}}{2}$

Conclui-se então que a diferença de nível correcta é igual à média dos desníveis obtidos com os dois estacionamentos do nível, mesmo que o nível tenha erro de colimação.

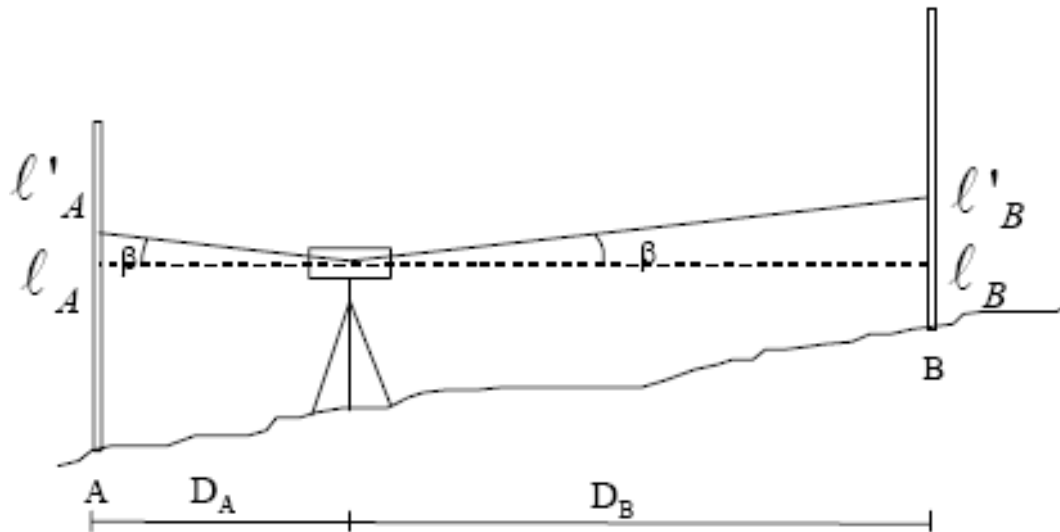
# Nivelamento geométrico ou directo

**Método das visadas recíprocas simultâneas:** este método é utilizado na travessia de rios. Para que a média das duas determinações do desnível possa igualmente eliminar o erro de refração, as condições atmosféricas devem ser idênticas. Para que isto aconteça, utilizam-se dois níveis operando em simultâneo em  $P_1$  e  $P_2$ ; como o erro de colimação geralmente é diferente para cada aparelho, repete-se o esquema trocando as posições dos dois níveis. A médias dos 4 desníveis elimina os erros de colimação e de refração.



# Nivelamento geométrico ou directo

**Determinação do erro de colimação do nível, conhecendo a diferença de nível correcta entre dois pontos:** conhecendo-se a diferença de nível correcta entre dois pontos e fazendo leituras  $l'_A$  e  $l'_B$  numa mira colocada, respectivamente, nos pontos A e B, leituras estas afectadas do erro de inclinação, é possível calcular o erro de inclinação do nível da seguinte forma:



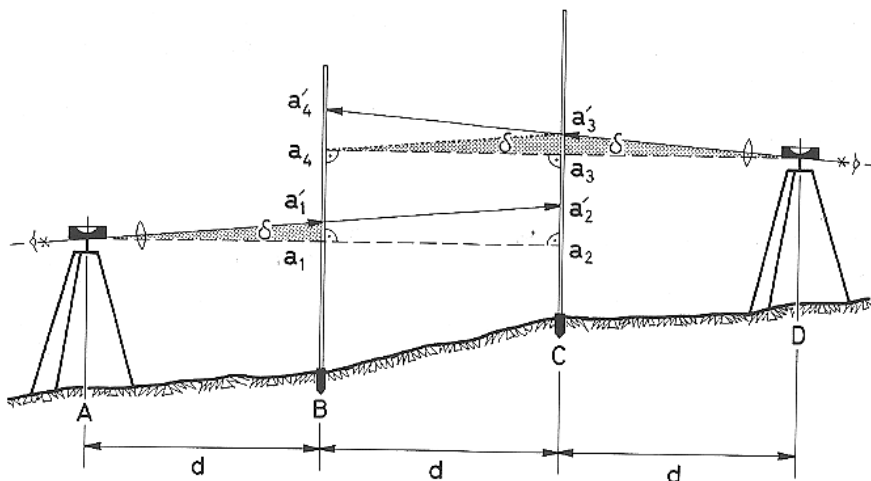
$$\begin{aligned} dN_{AB} &= l_A - l_B = (l'_A - D_A \operatorname{tg} \beta) - (l'_B - D_B \operatorname{tg} \beta) \\ &= l'_A - l'_B - D_A \operatorname{tg} \beta + D_B \operatorname{tg} \beta \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{dN_{AB} - l'_A + l'_B}{D_B - D_A}$$



# Nivelamento geométrico ou directo

**Verificação do erro de colimação do nível, não conhecendo a diferença de nível correcta entre dois pontos** : num terreno plano, marcar uma distância entre 45 a 60 m e dividi-la em 3 secções de igual comprimento. Colocar simultanea ou sucessivamente uma mira nos pontos B e C; se o aparelho estiver calibrado de tal forma que a linha de pontaria fique horizontal quando a bolha estiver calada, deverão ser obtidas as leituras  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  e  $a_4$ , que se relacionam através de  $a_4 - a_1 = a_3 - a_2$ . Uma linha de pontaria inclinada formará um ângulo  $\delta$  com o plano horizontal: neste caso, calando a nivela esférica em A, obtêm-se as leituras  $a'_1$  na mira em B e  $a'_2$  na mira em C e calando a nivela esférica em D, obtêm-se as leituras  $a'_4$  na mira em B e  $a'_3$  na mira em C. Considerando uma paralela à linha  $a'_1 a'_2$  passando por  $a'_3$ ,



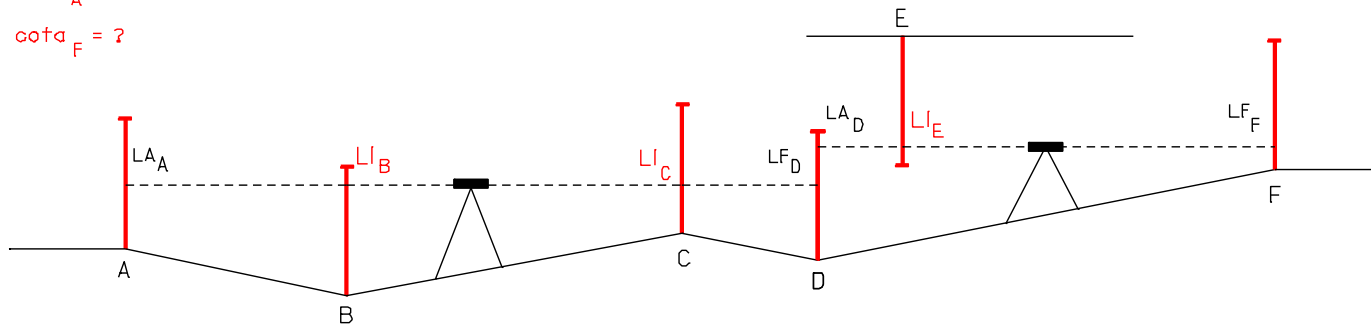
esta linha intersecta a mira em B no ponto  $a_4$ , ou seja, na alt indicada pela pontaria horizontal a partir de D, de tal forma que  $a_4 - a'_1 = a'_3 - a'_2$  ou  $a_4 = a'_1 - a'_2 + a'_3$ . Se  $a'_4$  diferir de  $a_4$  mais do que 2 mm a 30 m de distância repetir a medição. Se a diferença subsistir, a linha de pontaria deve ser ajustada.

# Nivelamento geométrico ou directo

## Exemplo:

$$\text{cota}_A = 12.333$$

$$\text{cota}_F = ?$$



$$\text{desnível}_{AD} = LA_A - LF_D = 0.982 - 1.173 = -0.191$$

$$\text{cota}_D = \text{cota}_A + \text{desnível}_{AD} = 12.142$$

$$\text{desnível}_{DF} = LA_D - LF_F = 1.755 - 0.356 = 1.399$$

$$\text{cota}_F = \text{cota}_D + \text{desnível}_{DF} = 13.541$$

$$\text{desnível}_{AB} = LA_A - LI_B = 0.982 - 1.714 = -0.732$$

$$\text{cota}_B = \text{cota}_A + \text{desnível}_{AB} = 11.601$$

$$\text{desnível}_{AC} = LA_A - LI_C = 0.982 - 0.759 = 0.223$$

$$\text{cota}_C = \text{cota}_A + \text{desnível}_{AC} = 12.556$$

$$\text{desnível}_{FE} = LF_F - (LI_E) = 0.356 - (-1.722) = 2.078$$

$$\text{cota}_E = \text{cota}_F + \text{desnível}_{FE} = 13.541 + 2.078 = 15.619$$

$$\text{desnível}_{DB} = LF_D - LI_B = 1.173 - 1.714 = -0.541$$

$$\text{cota}_B = \text{cota}_D + \text{desnível}_{DB} = 12.142 - 0.541 = 11.601$$

# Nivelamento geométrico ou directo

---

**Exemplo:**

Tendo estacionado um nível sucessivamente nos pontos  $E_1$  e  $E_2$  e realizado as observações seguintes sobre uma mira vertical colocada nos pontos A e B, determine a altitude de B sabendo que a altitude de A é 26.234 m. Se a distância horizontal entre A e B for igual a 55 m, indique as posições possíveis para  $E_1$  e  $E_2$ .

	A	B
$E_1$	1.408 m	2.770 m
	1.226 m	2.548 m
	1.044 m	2.326 m
$E_2$	1.097 m	2.526 m
	0.891 m	2.206 m
	0.685 m	1.886 m

# Nivelamento geométrico ou directo

---

$$dh_{E1-A}=(1.408-1.044)*100=36.4 \text{ m}$$

$$dh_{E1-B}=(2.770-2.326)*100=44.4 \text{ m}$$

$$\Delta_{AB}=1.226-2.548=-1.322 \text{ m}$$

$$C_B=C_A + \Delta_{AB}=26.234-1.322=\mathbf{24.912 \text{ m}}$$

$$(1.408+1.044)/2=1.226 \text{ m}$$

$$(2.770+2.326)/2=2.548 \text{ m}$$

$$dh_{E2-A}=(1.097-0.685)*100=41.2 \text{ m}$$

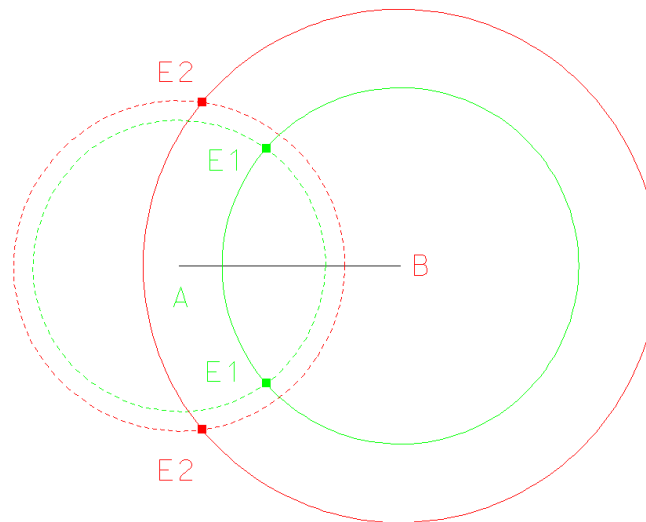
$$dh_{E2-B}=(2.526-1.886)*100=64.0 \text{ m}$$

$$\Delta_{AB}=0.891-2.206=-1.315 \text{ m}$$

$$C_B=C_A + \Delta_{AB}=26.234-1.315=\mathbf{24.919 \text{ m}}$$

$$(1.097+0.685)/2=0.891 \text{ m}$$

$$(2.526+1.886)/2=2.206 \text{ m}$$



# Nivelamento geométrico ou directo

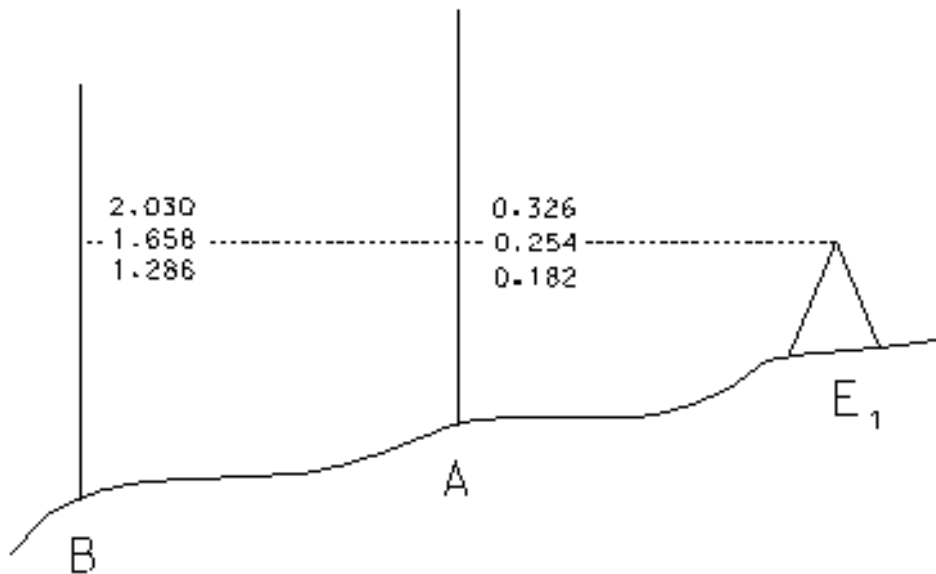
---

## Exemplo:

Considerando o seguinte registo de observações efectuadas com um nível e sabendo que o ponto  $E_1$  está situado no alinhamento definido pelos pontos A e B e fora do segmento AB, determine o declive do terreno entre A e B.

	A	B
$E_1$	0.326 m	2.030 m
	0.254 m	1.658 m
	0.182 m	1.286 m

# Nivelamento geométrico ou directo



$$C_A + 0.254 = C_B + 1.658$$

$$\text{Desnível}^{AB} = \Delta^{AB} = C_B - C_A = 0.254 - 1.658 = -1.404 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} D_{\text{horizontal}}^{AB} &= D_{\text{horizontal}}^{E_1 B} - D_{\text{horizontal}}^{E_1 A} = \\ &= (2.030 - 1.286) * 100 - (0.326 - 0.182) * 100 = \\ &= 74.4 - 14.4 = 60.0 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\text{Declive}^{AB} = \frac{\Delta^{AB}}{D_{\text{horizontal}}^{AB}} = \frac{-1.404}{60.0} * 100\% = -2.34\%$$

# Nivelamento geométrico ou directo

**Exemplo: considerando o resultado da observação de uma linha de nivelamento geométrico com extremidades nos pontos A e F, cujas altitudes são, respectivamente, 207.825 m e 201.371 m (a constante do aparelho utilizado é igual a 100):**

	Leituras à reductuuarda					Leituras à frente					Desníveis	
	Fio superior (m)	Fio médio (m)	Fio inferior (m)	Média (m)	Distância (m)	Fio superior (m)	Fio médio (m)	Fio inferior (m)	Média (m)	Distância (m)	a subir	a descer
A	1.187	0.931	0.675									
B	1.524	1.052	0.580			3.361	3.104	2.848				
C	2.390	2.156	1.922			3.954	3.481	3.009				
D	1.262	1.157	1.052			1.605	1.371	1.141				
E	1.655	1.118	0.581			2.907	2.804	2.699				
F						2.632	2.093	1.556				

- a) Proceda à compensação dos desníveis observados e calcule a altitude compensada dos pontos intermédios (utilize como critério para a definição da tolerância  $\pm 50 \sqrt{\sum \text{distâncias}(\text{km})}$  (os pesos associados a cada desnível dependem do quadrado da distância entre miras).
- b) Calcule o desnível do ponto A para o ponto B supondo que o eixo de colimação tem uma inclinação (relativamente ao horizonte) de  $+6^\circ$ .
- c) Calcule o desnível do ponto A para o ponto B no caso da mira ter uma inclinação de  $5^\circ$  para a frente no ponto B.

# Nivelamento geométrico ou directo

	Leituras à rectaguarda					Leituras à frente					Desníveis	
	Fio superior (m)	Fio médio (m)	Fio inferior (m)	Média (m)	Distância (m)	Fio superior (m)	Fio médio (m)	Fio inferior (m)	Média (m)	Distância (m)	a subir	a descer
A	1.187	0.931	0.675	0.931	51.2							
B	1.524	1.052	0.580	1.052	94.4	3.361	3.104	2.848	3.1045	51.3		2.173
C	2.390	2.156	1.922	2.156	46.8	3.954	3.481	3.009	3.4815	94.5		2.429
D	1.262	1.157	1.052	1.157	21	1.605	1.371	1.141	1.373	46.4	0.785	
E	1.655	1.118	0.581	1.118	107.4	2.907	2.804	2.699	2.803	20.8		1.647
F						2.632	2.093	1.556	2.094	107.6		0.975

a)  $\Delta_{AF} = C_F - C_A = 201.371 \text{ m} - 207.825 \text{ m} = -6.454 \text{ m}$

$\varepsilon = \Delta_{AF} - \sum \text{desníveis} = -6.454 + 6.439 = -0.015 \text{ m}$

$\varepsilon_T (\text{mm}) = 50 \sqrt{\sum \text{distâncias}(\text{km})} = 0.04 \text{ m} \Rightarrow \varepsilon < \varepsilon_T$

ou seja, aceitam-se os dados e pode efectuar-se o ajustamento.



# Nivelamento geométrico ou directo

pesos: (D=distância entre miras)

$$\varepsilon_j = \frac{D_j^2}{\sum_k D_k^2} = \frac{D_j^2}{102.5^2 + 188.9^2 + 93.2^2 + 41.8^2 + 215^2} = \frac{D_j^2}{102847.94}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= 0.10215323709935269486194862045851 \\ \varepsilon_2 &= 0.34695113971169476024507637197206 \\ \varepsilon_3 &= 0.084819977920802302894934016179614 \\ \varepsilon_4 &= 0.016988575561163402981138951348953 \\ \varepsilon_5 &= 0.4494499355067296437828506822791\end{aligned}$$

desníveis ajustados:  $\bar{\Delta}_j = \Delta_j + \varepsilon_j \times \varepsilon \Rightarrow$

$$\bar{\Delta}_1 = -2.173 - 0.0015322985564902904229292293068777 = -2.1745322985564902904229292293069$$

$$\bar{\Delta}_2 = -2.429 - 0.0052042670956754214036761455795809 = -2.4342042670956754214036761455796$$

$$\bar{\Delta}_3 = 0.785 - 0.0012722996688120345434240102426942 = 0.78372770033118796545657598975731$$

$$\bar{\Delta}_4 = -1.646 - 0.00025482863341745104471708427023429 = -1.6472548286334174510447170842702$$

$$\bar{\Delta}_5 = -0.976 - 0.0067417490326009446567427602341865 = -0.98174174903260094465674276023419$$

altitudes ajustadas:

$$C_A = 207.825 \text{ m}$$

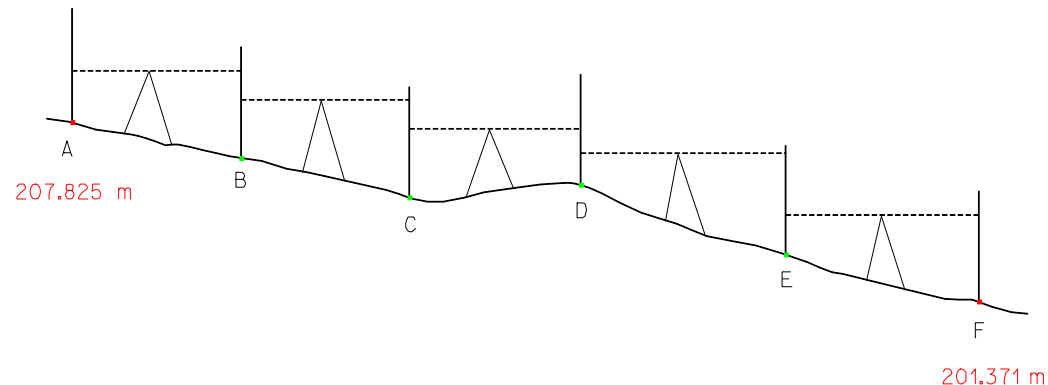
$$C_B = 205.650 \text{ m}$$

$$C_C = 203.216 \text{ m}$$

$$C_D = 204.000 \text{ m}$$

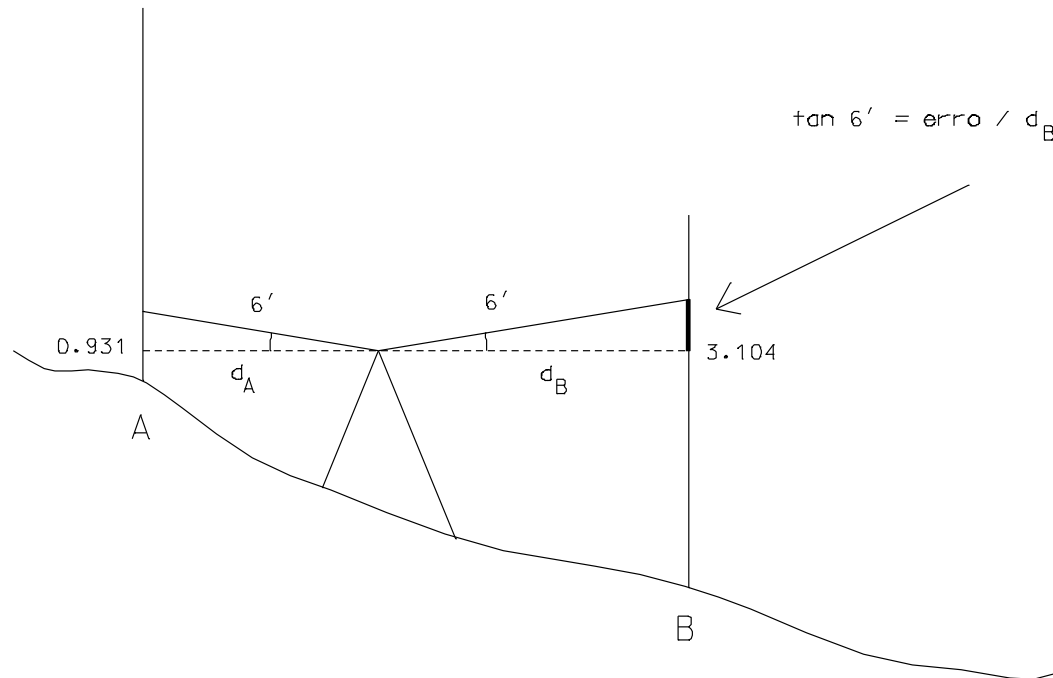
$$C_E = 202.353 \text{ m}$$

$$C_F = 201.371 \text{ m}$$



# Nivelamento geométrico ou directo

b)



Existindo um erro de inclinação de 6', as leituras não seriam as indicadas mas sim **maiores** (já que a linha de pontaria está inclinada para cima):

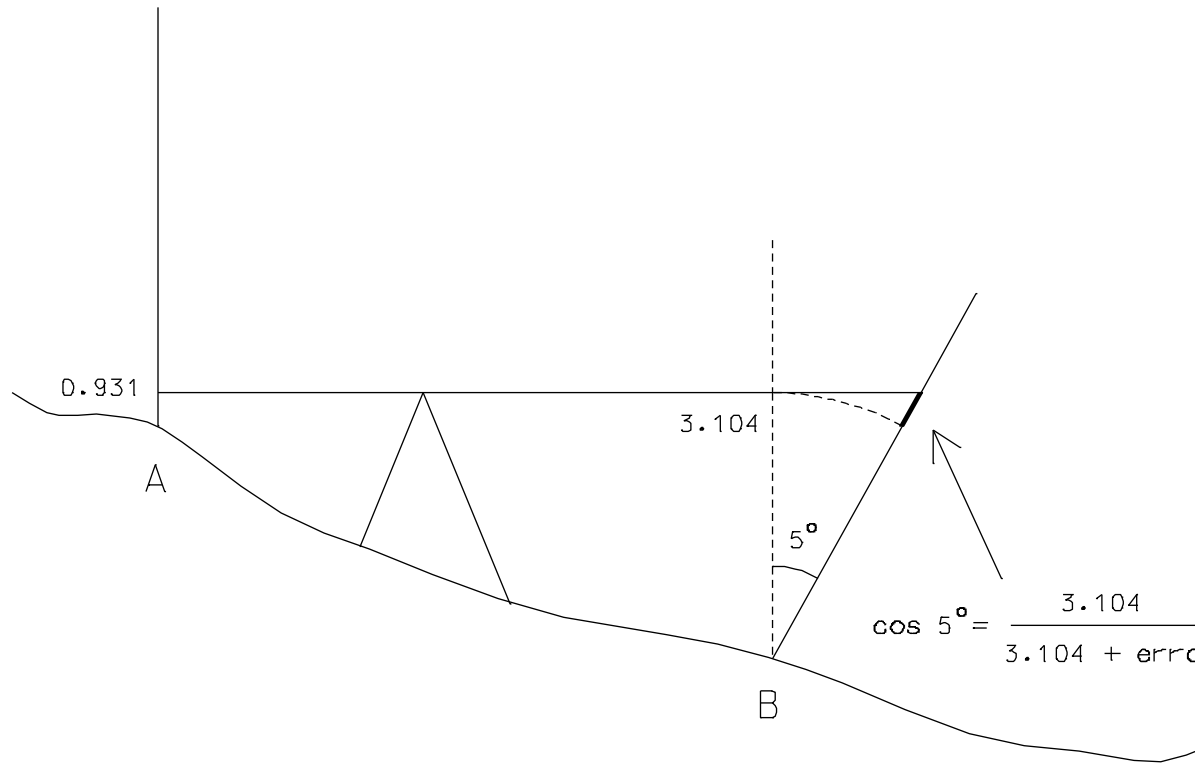
Leitura à rectaguarda em A:  $0.931 + 51.2 \cdot \tan 6' = \mathbf{1.020 \text{ m}}$  (**0.931 m**)

Leitura à frente em B:  $3.104 + 51.3 \cdot \tan 6' = \mathbf{3.194 \text{ m}}$  (**3.104 m**)

O desnível correspondente seria **-2.174 m** ou seja, embora o erro afecte bastante as leituras, neste caso, como as distâncias nível-miras são muito semelhantes atrás e à frente, a diferença é relativamente pequena (**-2.173 m**).

# Nivelamento geométrico ou directo

c)



A leitura à frente em B seria:  $3.104 + \text{erro} = 3.104 / \cos 5^\circ = 3.116$ , pelo que o desnível entre A e B seria **-2.185 m**.

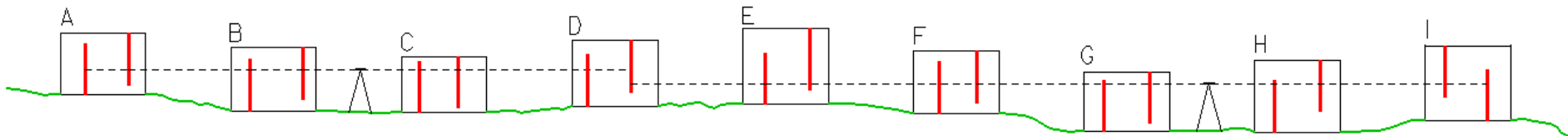
# Nivelamento geométrico ou directo

Exemplo: considere uma série de edifícios com um único piso, construídos em banda. Calcule as alts do pavimento e do tecto de cada edifício em relação à altitude do pavimento do edifício A, igual a 20.00 m (as leituras entre parentesis correspondem a leituras com a mira invertida).

LA	LI	LF	Desnível	alt	
0.75				20.00	Pavimento edifício A
	(1.05)				Tecto edifício A
	1.21				Pavimento edifício B
	(0.63)				Tecto edifício B
	1.27				Pavimento edifício C
	(0.37)				Tecto edifício C
	1.08				Pavimento edifício D
(1.25)		(0.83)			Tecto edifício D
	0.60				Pavimento edifício E
	(1.62)				Tecto edifício E
	0.87				Pavimento edifício F
	(0.94)				Tecto edifício F
	1.40				Pavimento edifício G
(1.09)		(0.35)			Tecto edifício G
	0.68				Pavimento edifício H
	(1.42)				Tecto edifício H
	(1.85)				Pavimento edifício I
		0.35			Tecto edifício I

# Nivelamento geométrico ou directo

---



# Nivelamento geométrico ou directo

LA	LI	LF	Desníveis	alts	Comentário
0.75				20.00	Pavimento edifício A
	(1.05)		$0.75 - (-1.05) = 1.80$	21.80	Tecto edifício A
	1.21		$0.75 - 1.21 = -0.46$	19.54	Pavimento edifício B
	(0.63)		$0.75 - (-0.63) = 1.38$	21.38	Tecto edifício B
	1.27		$0.75 - 1.27 = -0.52$	19.48	Pavimento edifício C
	(0.37)		$0.75 - (-0.37) = 1.12$	21.12	Tecto edifício C
	1.08		$0.75 - 1.08 = -0.33$	19.67	Pavimento edifício D
(1.25)		(0.83)	$0.75 - (-0.83) = 1.58$	21.58	Tecto edifício D
	0.60		$-1.25 - 0.60 = -1.85$	19.73	Pavimento edifício E
	(1.62)		$-1.25 - (-1.62) = 0.37$	21.95	Tecto edifício E
	0.87		$-1.25 - 0.87 = -2.12$	19.46	Pavimento edifício F
	(0.94)		$-1.25 - (-0.94) = -0.31$	21.27	Tecto edifício F
	1.40		$-1.25 - 1.40 = -2.65$	18.93	Pavimento edifício G
(1.09)		(0.35)	$-1.25 - (-0.35) = -0.90$	20.68	Tecto edifício G
	0.68		$-1.09 - 0.68 = -1.77$	18.91	Pavimento edifício H
	(1.42)		$-1.09 - (-1.42) = 0.33$	21.01	Tecto edifício H
	(1.85)		$-1.09 - (-1.85) = 0.76$	21.44	Pavimento edifício I
		0.35	$-1.09 - 0.35 = -1.44$	19.24	Tecto edifício I

# Nivelamento geométrico ou directo

Exemplo: suponha que tem que efectuar o controlo dos deslocamentos verticais do tabuleiro de uma ponte durante a realização de um ensaio de carga, repetido em 2 épocas. Para o efeito, estaciona um nível óptico rectificado no centro da ponte e efectua leituras numa mira sucessivamente estacionada nos pontos A, B, C, D, E, F, G, H, sendo os pontos A e H pontos de referência sobre maciços rochosos materializados nas duas extremidades da ponte, de altitudes respectivamente iguais a 198.322 m e 197.426 m, estando os 8 pontos considerados espaçados de 10 em 10 m ao longo do tabuleiro. Sendo as observações efectuadas nas épocas  $E_1$  e  $E_2$  indicadas na tabela seguinte, determine os deslocamentos verticais para os 6 pontos sobre o tabuleiro.

épocas	A	B	C	D	E	F	G	H
$E_1$	1.440 m	1.135 m	1.141 m	1.144 m	1.136 m	1.149 m	1.138 m	2.342 m
$E_2$	1.937 m	1.634 m	1.644 m	1.642 m	1.638 m	1.648 m	1.641 m	2.843 m

(critério para a definição da tolerância:  $\varepsilon_T (\text{mm}) = 50 \sqrt{\sum \text{distâncias}(\text{km})}$  )



# Nivelamento geométrico ou directo

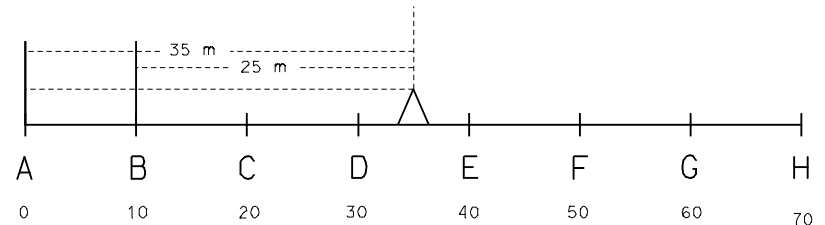
$$\Delta_{AH} = C_H - C_A = 197.426 - 198.322 = -0.896 \text{ m}$$

$$\begin{array}{l} \text{Época } E_1: \\ \Delta_{AB} = 1.440 - 1.135 = 0.305 \\ \Delta_{BC} = 1.135 - 1.141 = -0.005 \\ \Delta_{CD} = 1.141 - 1.144 = -0.003 \\ \Delta_{DE} = 1.144 - 1.136 = 0.008 \\ \Delta_{EF} = 1.136 - 1.149 = -0.013 \\ \Delta_{FG} = 1.149 - 1.138 = 0.011 \\ \Delta_{GH} = 1.138 - 2.342 = -1.204 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Época } E_1: \\ \Delta_{AB} = 1.440 - 1.135 = 0.305 \\ \Delta_{BC} = 1.135 - 1.141 = -0.005 \\ \Delta_{CD} = 1.141 - 1.144 = -0.003 \\ \Delta_{DE} = 1.144 - 1.136 = 0.008 \\ \Delta_{EF} = 1.136 - 1.149 = -0.013 \\ \Delta_{FG} = 1.149 - 1.138 = 0.011 \\ \Delta_{GH} = 1.138 - 2.342 = -1.204 \end{array}} \right\} \sum \Delta = \sum \text{desníveis observados na época } E_1 = -0.902 \text{ m}$$

$$\varepsilon = \Delta_{AH} - \sum \Delta = -0.896 + 0.902 = 0.006 \text{ m (erro de fecho)}$$

$$T_\varepsilon (\text{mm}) = 50 \sqrt{\sum D_{\text{km}}} = 50 \sqrt{(60 + 40 + 20 + 10 + 20 + 40 + 60) / 1000} = 25 \text{ mm} = 0.025 \text{ m (tolerância)} \Rightarrow \varepsilon < T_\varepsilon$$

$$\sum D^2 = 60^2 + 40^2 + 20^2 + 10^2 + 20^2 + 40^2 + 60^2 = 11300$$





# Nivelamento geométrico ou directo

$$\left. \begin{aligned} P_{AB} &= 60^2 / 11300 = 0.319 \\ P_{BC} &= 40^2 / 11300 = 0.142 \\ P_{CD} &= 20^2 / 11300 = 0.035 \\ P_{DE} &= 10^2 / 11300 = 0.009 \\ P_{EF} &= 20^2 / 11300 = 0.035 \\ P_{FG} &= 40^2 / 11300 = 0.142 \\ P_{GH} &= 60^2 / 11300 = 0.319 \end{aligned} \right\} \text{ pesos associados a cada desnível}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Delta}_{AB} &= \Delta_{AB} + \varepsilon * P_{AB} = 0.305 + 0.002 = 0.307 \\ \bar{\Delta}_{BC} &= \Delta_{BC} + \varepsilon * P_{BC} = -0.006 + 0.001 = -0.005 \\ \bar{\Delta}_{CD} &= \Delta_{CD} + \varepsilon * P_{CD} = -0.003 + 0.000 = -0.003 \\ \bar{\Delta}_{DE} &= \Delta_{DE} + \varepsilon * P_{DE} = 0.008 + 0.000 = 0.008 \\ \bar{\Delta}_{EF} &= \Delta_{EF} + \varepsilon * P_{EF} = -0.013 + 0.000 = -0.013 \\ \bar{\Delta}_{FG} &= \Delta_{FG} + \varepsilon * P_{FG} = 0.011 + 0.001 = 0.012 \\ \bar{\Delta}_{GH} &= \Delta_{GH} + \varepsilon * P_{GH} = -1.204 + 0.002 = -1.202 \end{aligned} \right\} \sum \bar{\Delta} = \sum \text{ desníveis compensados na época } E_1 = -0.896 \text{ m}$$

$$\left. \begin{aligned} C_B &= C_A + \bar{\Delta}_{AB} = 198.322 + 0.307 = 198.629 \text{ m} \\ C_C &= C_B + \bar{\Delta}_{BC} = 198.629 - 0.005 = 198.624 \text{ m} \\ C_D &= C_C + \bar{\Delta}_{CD} = 198.624 - 0.003 = 198.621 \text{ m} \\ C_E &= C_D + \bar{\Delta}_{DE} = 198.621 + 0.008 = 198.629 \text{ m} \\ C_F &= C_E + \bar{\Delta}_{EF} = 198.629 - 0.013 = 198.616 \text{ m} \\ C_G &= C_F + \bar{\Delta}_{FG} = 198.616 + 0.012 = 198.628 \text{ m} \\ C_H &= C_G + \bar{\Delta}_{GH} = 198.628 - 1.202 = 197.426 \text{ m} \end{aligned} \right\} \text{ cotas compensadas na época } E_1$$

# Nivelamento geométrico ou directo

Época E<sub>2</sub>:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_{AB} = 1.937 - 1.634 = 0.303 \\ \Delta_{BC} = 1.634 - 1.644 = -0.010 \\ \Delta_{CD} = 1.644 - 1.642 = 0.002 \\ \Delta_{DE} = 1.642 - 1.638 = 0.004 \\ \Delta_{EF} = 1.638 - 1.648 = -0.010 \\ \Delta_{FG} = 1.648 - 1.641 = 0.007 \\ \Delta_{GH} = 1.641 - 2.843 = -1.202 \end{array} \right\} \sum \Delta = \sum \text{desníveis observados na época } E_2 = -0.906 \text{ m}$$

$$\varepsilon = \Delta_{AH} - \sum \Delta = -0.896 + 0.906 = 0.010 \text{ m (erro de fecho)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\Delta}_{AB} = \Delta_{AB} + \varepsilon * P_{AB} = 0.303 + 0.004 = 0.307 \\ \bar{\Delta}_{BC} = \Delta_{BC} + \varepsilon * P_{BC} = -0.010 + 0.001 = -0.009 \\ \bar{\Delta}_{CD} = \Delta_{CD} + \varepsilon * P_{CD} = 0.002 + 0.000 = 0.002 \\ \bar{\Delta}_{DE} = \Delta_{DE} + \varepsilon * P_{DE} = 0.004 + 0.000 = 0.004 \\ \bar{\Delta}_{EF} = \Delta_{EF} + \varepsilon * P_{EF} = -0.010 + 0.000 = -0.010 \\ \bar{\Delta}_{FG} = \Delta_{FG} + \varepsilon * P_{FG} = 0.007 + 0.001 = 0.008 \\ \bar{\Delta}_{GH} = \Delta_{GH} + \varepsilon * P_{GH} = -1.202 + 0.004 = -1.198 \end{array} \right\} \sum \bar{\Delta} = \sum \text{desníveis compensados na época } E_2 = -0.896 \text{ m}$$

# Nivelamento geométrico ou directo

---

$$\left. \begin{aligned} C_B &= C_A + \bar{\Delta}_{AB} = 198.322 + 0.307 = 198.629 \text{ m} \\ C_C &= C_B + \bar{\Delta}_{BC} = 198.629 - 0.009 = 198.620 \text{ m} \\ C_D &= C_C + \bar{\Delta}_{CD} = 198.620 + 0.002 = 198.622 \text{ m} \\ C_E &= C_D + \bar{\Delta}_{DE} = 198.622 + 0.004 = 198.626 \text{ m} \\ C_F &= C_E + \bar{\Delta}_{EF} = 198.626 - 0.010 = 198.616 \text{ m} \\ C_G &= C_F + \bar{\Delta}_{FG} = 198.616 + 0.008 = 198.624 \text{ m} \\ C_H &= C_G + \bar{\Delta}_{GH} = 198.624 - 1.198 = 197.426 \text{ m} \end{aligned} \right\} \text{cotas compensadas na época } E_2$$

Comparação entre as épocas  $E_1$  e  $E_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \delta_B &= 198.629 - 198.629 = 0 \text{ m} \\ \delta_C &= 198.624 - 198.620 = 0.004 \text{ m} \\ \delta_D &= 198.621 - 198.622 = -0.001 \text{ m} \\ \delta_E &= 198.629 - 198.626 = 0.003 \text{ m} \\ \delta_F &= 198.616 - 198.616 = 0 \text{ m} \\ \delta_G &= 198.628 - 198.624 = 0.004 \text{ m} \end{aligned} \right\} \text{deslocamentos verticais nos pontos B, C, D, E, F, G}$$

# Nivelamento geométrico ou directo

---

**Exemplo: o nivelamento geométrico permite determinar desníveis entre pontos do terreno utilizando níveis. Para determinar a altitude dos pontos A, B e C do terreno, estabeleceu-se uma linha de nivelamento fechada, apoiada na marca M com altitude 202.268 m, tendo-se registado as seguintes observações:**

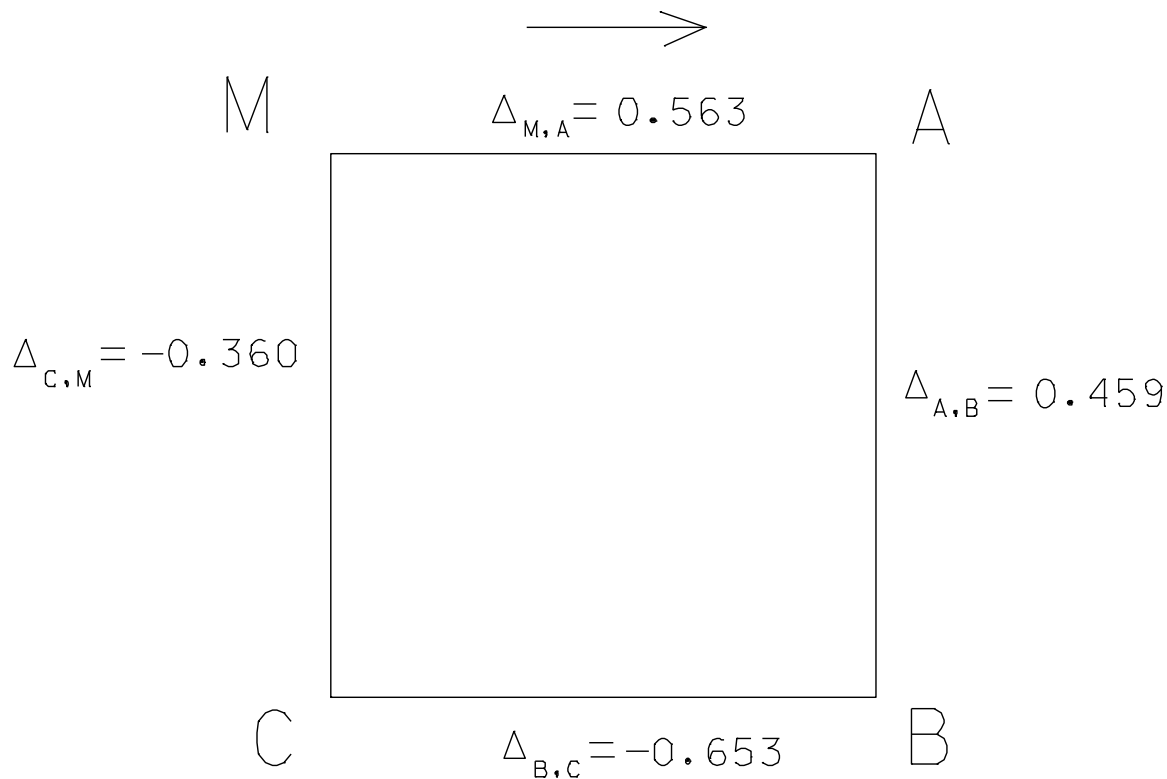
Pontos visados	Leitura atrás	Leitura à frente
M	1.852	---
A	1.632	1.289
B	0.806	1.173
C	0.688	1.459
M	---	1.048

**Determine as altitudes ajustadas dos pontos referidos, supondo que os 4 pontos definem um quadrado com 50 m de lado (os pesos associados a um desnível dependem do quadrado do comprimento desse troço).**

# Nivelamento geométrico ou directo

---

Como as distâncias entre miras sucessivas são iguais, os vários desníveis vão ter o mesmo peso, pelo que basta calcular o erro de fecho altimétrico e distribuí-lo pelos 4 desníveis observados:



# Nivelamento geométrico ou directo

---

Erro de fecho altimétrico:  $0.563+0.459-0.653-0.360=0.009$  m

Desníveis ajustados:

$$\bar{\Delta}_{M,A} = 0.563 - \frac{0.009}{4} = 0.561$$

$$\bar{\Delta}_{A,B} = 0.459 - \frac{0.009}{4} = 0.457$$

$$\bar{\Delta}_{B,C} = -0.653 - \frac{0.009}{4} = -0.655$$

$$\bar{\Delta}_{C,M} = -0.360 - \frac{0.009}{4} = -0.362$$

# Nivelamento geométrico ou directo

---

Exemplo: as leituras seguintes foram obtidas ao longo de um túnel. Calcule as altitudes dos pontos onde as miras foram colocadas em relação à altitude do ponto A, igual a 1216.039 m.

Leituras na mira	Distância a A	Comentário
1.759	0	LA para A
0.652	40 m	LI
0.091	80 m	LF
1.689		LA
0.430	120 m	LI
0.917	160 m	LF
0.680		LA
0.671	200 m	LI
0.494	240 m	LF
2.243		LA
1.682	280 m	LI
0.216	320 m	LF
1.520		LA
0.686	360 m	LF para B

# Nivelamento geométrico ou directo

---

Exemplo: processe os seguintes dados de um nivelamento efectuado ao longo de uma linha de comboio afectada por subsidência. Os pontos A e B estão fora da zona afectada e a inclinação do terreno era originalmente constante entre eles. Calcule a inclinação original do troço AB, o valor da subsidência de 20 em 20 m e a inclinação máxima da linha nesses intervalos.

LA	LI	LF	Distância (m)	Comentário
3.094			0	A (105.632 m)
	2.694		20	
2.310		2.344	40	
	2.027		60	
1.283		1.676	80	
	0.829		100	
2.502		1.692		Fora da linha
	1.146		120	
	0.725		140	
		0.332		B



# Nivelamento geométrico ou directo

**Exemplo: as leituras seguintes numa mira, em metros, foram efectuadas ao longo de uma estrada entre os pontos A e B. Estando inicialmente: 0.765, 1.064, (0.616), 1.835, 1.524; deslocou-se então o nível para outra posição, efectuando-se as leituras: 2.356, 1.378, (2.063), 0.677, 2.027, esta última correspondente à mira em B. Sendo a alt do ponto A igual a 41.819 m, calcule o gradiente entre A e B (as leituras entre parentesis correspondem a leituras com a mira invertida).**

# Nivelamento geométrico ou directo

---

Exemplo: no extracto de uma caderneta de nivelamento que se segue, complete as leituras em falta e calcule as altitudes dos pontos onde a mira foi colocada (as leituras apresentadas consideram-se correctas).

LA	LI	LF	Desnível	alt
				47.201
	2.322		-1.128	
	0.707		1.615	
2.167				45.025
		1.692	0.475	45.500
	2.246		0.610	46.110
	2.657			45.699
			-0.491	
		1.292	1.856	47.064

# Nivelamento geométrico ou directo

---

## Exemplo

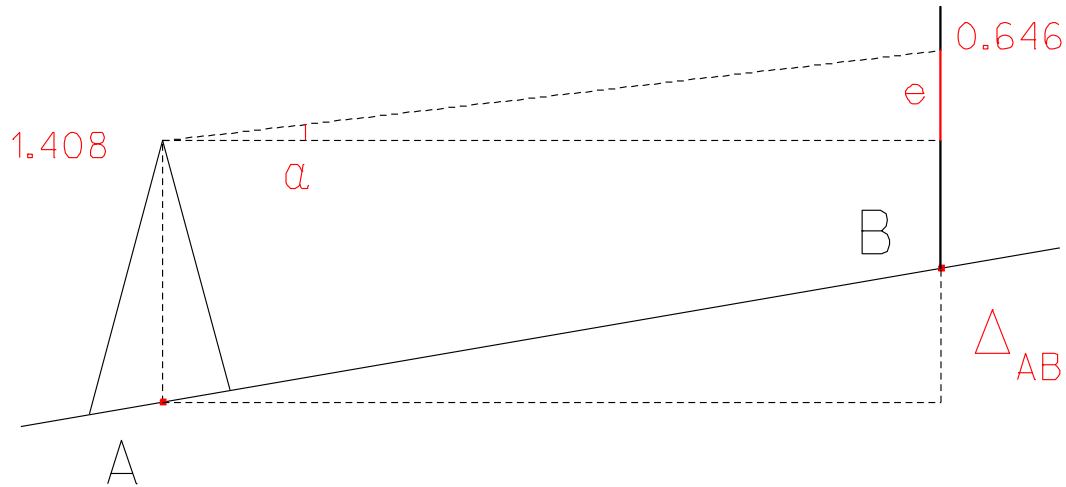
Foram medidos os seguintes desníveis entre quatro pontos:  $\delta_{12} = -2.341$  m,  $\delta_{23} = -1.675$  m,  $\delta_{34} = 2.348$  m,  $\delta_{41} = 1.650$  m. Sabendo que o ponto 1 tem a altitude de 100m, a) qual a altitude do ponto 3? b) supondo que foi medido o desnível  $\delta_{13} = -4.019$  m, construa o sistema de equações que permite obter a solução de mínimos quadrados para as altitudes dos pontos 2, 3 e 4 e determine a respectiva solução (considere observações não correlacionadas e de igual precisão).

# **Nivelamento geométrico ou directo**

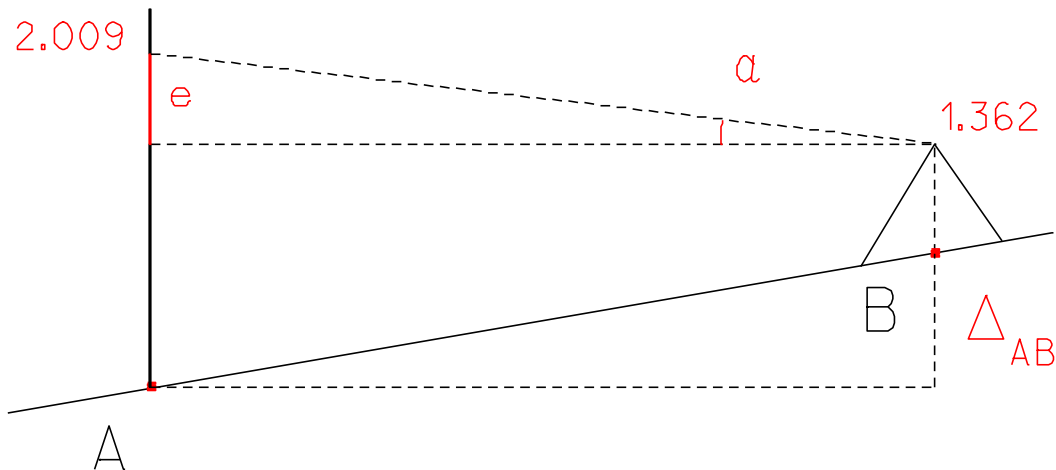
---

**Exemplo: estacionou-se um nível automático sobre o ponto A e mediu-se a respectiva altura, igual a 1.408 m, tendo-se efectuada a leitura 0.646 m numa mira colocada no ponto B. Trocou-se então a posição do nível e da mira, registando-se a altura do instrumento igual a 1.362 m e a leitura em A igual a 2.009 m. a) qual é a diferença de altitude entre os pontos A e B? b) existe erro de colimação no nível? c) no caso de existir erro de colimação, que procedimento deve ser seguido para o corrigir sem mudar o nível e a mira de posição?**

# Nivelamento geométrico ou directo



$$\Delta_{AB} + 0.646 - e = 1.408$$



$$\Delta_{AB} + 1.362 = 2.009 - e$$

# Nivelamento geométrico ou directo

A) **Somando** as duas expressões anteriores, tem-se:

$$2\Delta_{AB} = 1.408 - 0.646 + 2.009 - 1.362 \Rightarrow \Delta_{AB} = 0.7045 \text{ m}$$

B) **Subtraindo** as duas expressões anteriores, tem-se:

$$2e = -1.408 + 0.646 + 2.009 - .362 \Rightarrow e = -0.0575 \text{ m} \text{ por comprimento AB}$$

ou seja, a pontaria é efectuada abaixo da horizontal.

De  $\tan \varepsilon = e/AB$ , o valor angular do erro de colimação é  $\varepsilon = \text{atan}(e/AB)$ .

c) A **leitura correcta** com o instrumento em B e a mira em A deveria ser:

$$2.009 - (-0.0575) = 2.067 \text{ m}$$

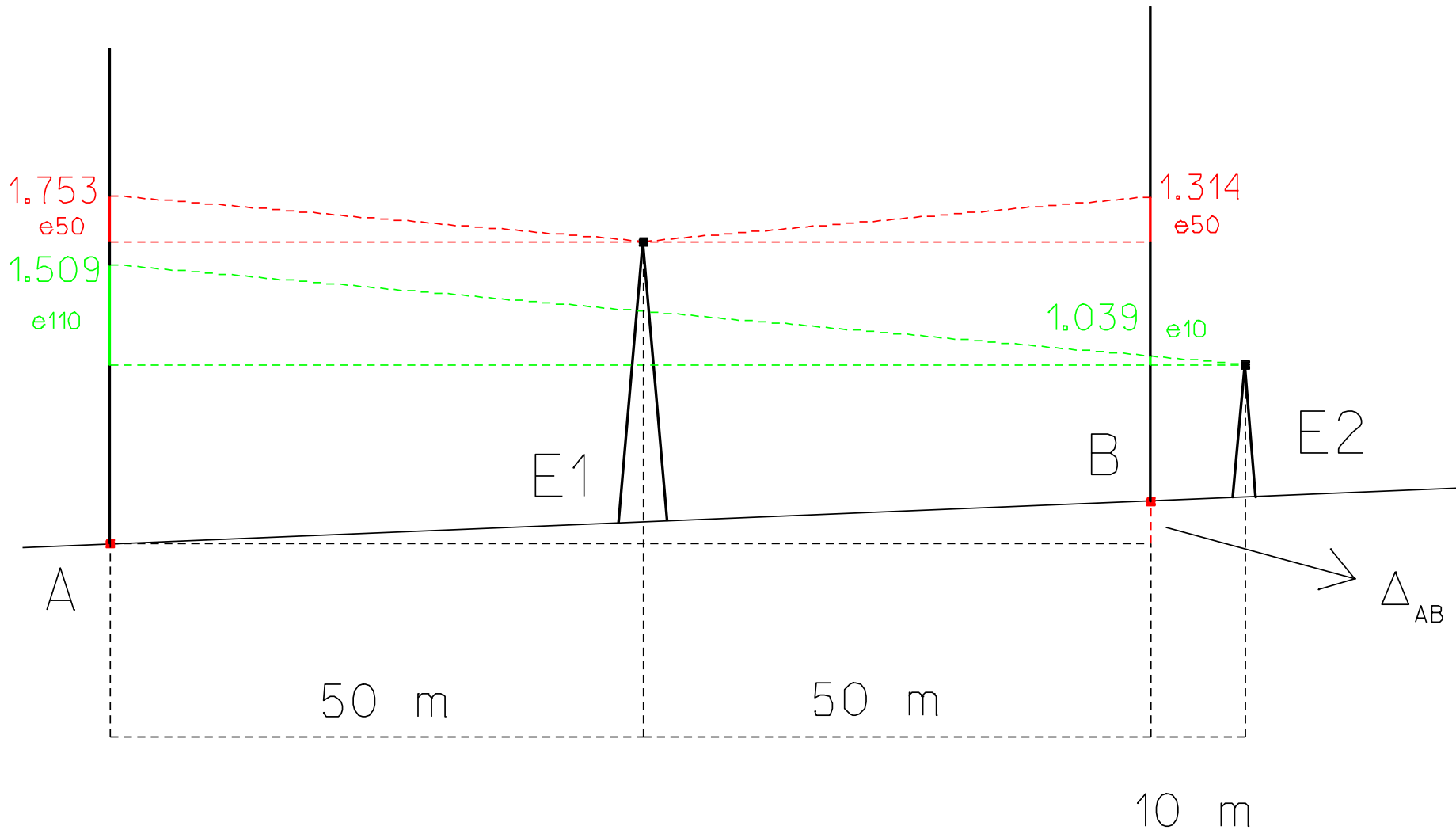
devendo os fios do retículo ser ajustados de forma a definirem esta leitura.

# **Nivelamento geométrico ou directo**

---

**Exemplo: na verificação de um nível automático, estacionou-se o aparelho a meia distância entre as miras colocadas nos pontos A e B (distanciados de 100 m), efectuando-se as leituras 1.753 m e 1.314 m, respectivamente. Estacionou-se então o nível na linha AB, 10 m atrás do ponto B, obtendo-se as leituras 1.039 m em B e 1.509 m em A. Calcule o erro instrumental de colimação.**

# Nivelamento geométrico ou directo



$$\Delta_{AB} + 1.314 - e_{50} = 1.753 - e_{50}$$

$$\Delta_{AB} + 1.039 - e_{10} = 1.509 - e_{110}$$



# Nivelamento geométrico ou directo

---

$$\text{de } \Delta_{AB} + 1.314 - e_{50} = 1.753 - e_{50} \Rightarrow \Delta_{AB} = \mathbf{0.439 \text{ m}}$$

$$\text{de } e_{10}/10 = e_{110}/110 \Rightarrow e_{110} = 11e_{10}$$

$$\text{de } 0.439 + 1.039 - e_{10} = 1.509 - e_{110} \Rightarrow 10 e_{10} = 0.031 \Rightarrow e_{10} = \mathbf{0.0031 \text{ m}}$$

Sendo  $\varepsilon$  o erro de colimação angular, tem-se:

$$\tan \varepsilon = e_{10}/10 \Rightarrow \varepsilon = \mathbf{\text{atan}(0.0031/10) \approx 1'}$$